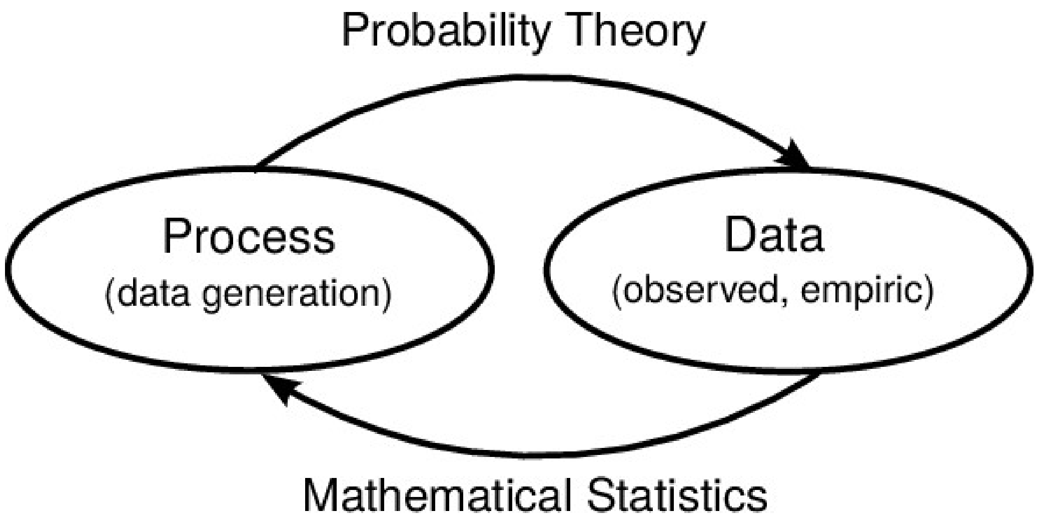
Въведение в теория на вероятностите



КОМБИНАТОРИКА

- Предмет на комбинаториката е изучаване на методите за образуване и пресмятане на броя на елементите в крайните множества.

ЗАЩО Я СПОМЕНАВАМЕ?

- Някои резултати от комбинаториката се използват при решаването на задачи от теорията на вероятностите.

КОМБИНАТОРИКА

- Ще въведем някои условности и определения:

- множествата ще отбелязваме с главни букви A, B,… , а елементите им с малки a, b, …;

- елементите на множествата ще разполагаме в големи скоби {…};

КОМБИНАТОРИКА

- с малка буква и до нея голяма в скоби (например $v(A)$) ще означаваме броя на елементите в множеството A;
- елементите на множествата ще разполагаме в големи скоби $\{\ldots\}$;
- когато $v(A)=0$, ще казваме, че $v(A)$ е празно множество и ще го бележим с $\emptyset$

КОМБИНАТОРИКА

- ако множествата А и В са взаимно чужди (непресичащи се), т.е. нямат общи елементи, то $v(A+B) = v(A) + v(B)$ – принцип на събиране;

- броят на наредените двойки (a_i, b_j), образувани от елементите на множествата $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots b_m)$ е равен на $n.m$ – принцип на умножение;

- всяка група от елементи на множеството А ще наричаме съединение;

КОМБИНАТОРИКА

- множеството от всички наредени съединения без повторение от n елемента с дължина n се нарича множество на пермутациите от n елемента. Броят на пермутациите се бележи с P_n и $P_n = n!$;

КОМБИНАТОРИКА

- всички наредени съединения без повторение ($k<=n$) или с повторение (k е произволно) от n елемента с дължина k образуват множество на вариациите от n-елемента, k-ти клас;

Брой на вариациите:

- без повторение - $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- с повторение - $\tilde{V}_n^k = n^k$

КОМБИНАТОРИКА

- елементите на множеството на всички ненаредени съединения с дължина k се наричат комбинации. Броят на комбинациите без повторение от n елемента k-ти клас (при k<=n) се означава с C_n^k или $\binom{n}{k}$ и $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

а с повторение - $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

КОМБИНАТОРИКА

Пример 1: Да се намери броят на студентите, ако е известно, че 15 от тях са взели изпита по невронни мрежи, 12 – по статистика, 10 – по изкуствен интелект, 8 – по невронни межи и статистика, 6 – по невронни межи и изкуствен интелект, 5 – по статистика и изкуствен интелект и 4 – и трита изпита.

КОМБИНАТОРИКА

Решение: С A, B и C ще означим съответно:

A={студентите, взели изпита по невронни мрежи},

B={студентите, взели изпита по статистика},

C={студентите, взели изпита по ИИ},

По условие $v(A)=15$, $v(B)=12$, $v(C)=10$, $v(AB)=8$, $v(AC)=6$, $v(BC)=5$ и $v(ABC)=4$.

То тогава броят на студентите е $v(A \cup B \cup C)=15+12+10-8-6-5+4=22$

Областта на теорията на вероятностите" е клон на математиката, който е занимаващи се с описание на вероятността от различни резултати

Вероятност количествена оценка

- Опит

⇨ Понятието опит е основно в теорията на вероятностите.

⇨ Посредством него тя добива практически смисъл.

В резултат от опита настъпва събитие.

Например:

-Пада се 6 при хвърлянето на зар.
-Пада се ези при хвърлянето на монета.
-Изважда се бяла топка от кутията с топки.

Нека с Ω отбележим пространството от елементарни събития (изходи) ω, които са свързани с даден опит.

Подмножествата на Ω се наричат събития.

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$

СЪБИТИЕ

Сигурно (достоверно) събитие – винаги настъпва - Ω

Невъзможно събитие - ∅

Случайно събитие – може да настъпи или не

Елементарно (неразложимо)

Съставно (разложимо) – при хвърляне на зар – пада се четно число, може да бъде 2, 4 или 6

Например при хвърляне на зар събитието „пада се 7“ е невъзможно, събитието „пада се по-малко от 7“ е достоверно, а събитието „пада се нечетно число“ е случайно.

Пример 2: Да се опишат елементарните събития при опита „хвърлят се три монети“.

Пример 2: Да се опишат елементарните събития при опита „хвърлят се три монети".

Решение: Елементарните събития при този опит могат да се разглеждат като наредени тройки (монетите са различни) от множеството {Е(ези), Т(тура)}, т. е. те са вариации с повторение от два елемента 3-ти клас и са $\tilde{V}_2^3 = 2^3 = 8$,

а именно (ЕЕЕ), (ЕЕТ), (ЕТЕ), (ТЕЕ), (ЕТТ), (ТЕТ), (ТТЕ), (ТТТ).

При провеждането на случаен експеримент можем да имаме следните изходи:

1) $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

- Монета: $n=2$, ω_1 = „ези“, ω_2 = „тура“, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$;
- 100 различни монети: $n = 2^{100}$, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^{100}}\}$;
- 6/49: $n=13983816$, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13983816}\}$;

При провеждането на случаен експеримент можем да имаме следните изходи:

2) $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
- Хвърляме монета и например „ези“ се пада на j-тото хвърляне - ω_j;

За събитията са в сила следните закони:

Комутативен: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}, \mathrm{AB} = \mathrm{BA}$

Асоциативен: $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C},\ \ \mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$

Дистрибутивен: $\mathrm{A}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{AB} \cup \mathrm{AC}$

Тъждествен: $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A},\ \ \mathrm{AA} = \mathrm{A}$

Теорема на Де Морган: $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{AB}},\ \ \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

ВЕРОЯТНОСТИ

Определение

Нека $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ldots, \omega_n\}$ е пространство от елементарни събития. Ще допуснем, че всички са равновероятни. Вероятност на събитието

$A=\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3},\ldots, \omega_{in}\}$ е числото $P(A)=\frac{v(A)}{v(\Omega)}=\frac{m}{n}$, където $v(A)$ е брой на благоприятните изходи за събитието A, а $v(\Omega)$ е брой на всички възможни изходи.

ВЕРОЯТНОСТИ

Свойства

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ за всяко А;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $\mathrm{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$.

A=$\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \ldots, \omega_{in}\}$ е числото $P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{m}{n}$, където $v(A)$ е брой на благоприятните изходи за събитието А, а $v(\Omega)$ е брой на всички възможни изходи.

ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 3: Монета се подхвърля три пъти. Каква е вероятността да се падне два пъти „ези“?

ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 3: Монета се подхвърля три пъти. Каква е вероятността да се падне два пъти „ези“?

Елементарните събития са равновероятни!

ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 3: Монета се подхвърля три пъти. Каква е вероятността да се падне два пъти „ези“?

Елементарните събития са равновероятни!

$v(\Omega) = 8,\ v(\mathrm{B}) = 3,\ \mathrm{P}(B) = \frac{3}{8}$

ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 4: Каква е вероятността да спечелим от 6/49?

ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 4: Каква е вероятността да спечелим от 6/49?

Комбинация от 49 елемента, 6-ти клас.

Отг.: $\frac{1}{\frac{49!}{6!(49-6)!}} = 1/_{6}^{49}$

ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

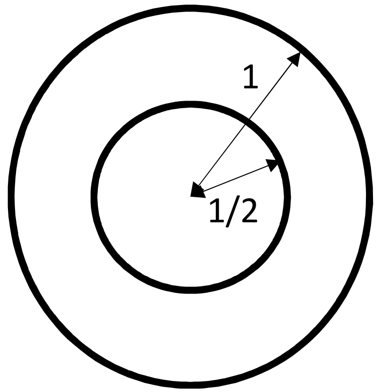
Определение: Казваме, че една точка се избира по случаен начин, ако вероятността да бъде избрана от произволна част B на фигурата A е пропорционална на геометричната мярка на тази част и не зависи както от формата на B, така и от разположението на B по отношение на съдържащата я фигура A.

ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Ако геометричната мярка на фигурата В е S_B , а на А е S_A, то вероятността Р избраната по случаен начин точка да бъде от фигурата В е $P = S_B / S_A$

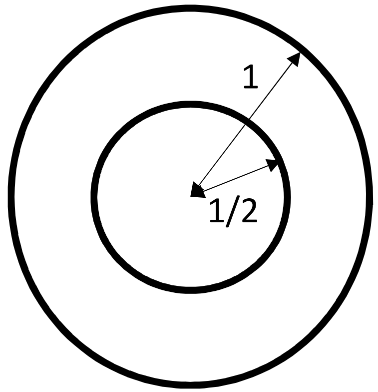
ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Пример 5: Каква е вероятността при избор на точка в кръг с радиус 1, тя да е на разстояние най-много на ½ от центъра?



ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

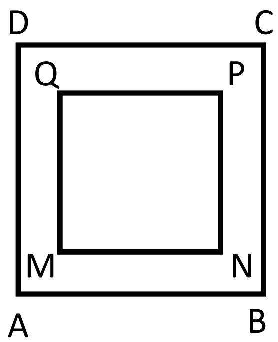
Пример 5: Каква е вероятността при избор на точка в кръг с радиус 1, тя да е на разстояние най-много на ½ от центъра?



Отг.: $P(A)=\frac{S_{1/2}}{S_1}=\frac{\pi*(1/2)^2}{\pi*1^2}=\frac{1}{4}$

ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Пример 6: На под се хвърля монета с диаметър d. Подът е направен от квадратни плочки с дължина на страната a>d. Каква е вероятността монетата да не пресече нито една от страните на на квадратите на пода?



ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Решение: Всички възможни изходи се определят от положението на центъра на монетата. Тъй като всички квадрати на пода са равноправни, то разглеждаме само квадрата във вътрешността, на който лежи центъра на монетата. Пространството от елементарни събития Ω се състои от точките на квадрата ABCD със страна a. Монетата няма да пресече нито една страна на квадрата само ако центъра ѝ се окаже във вътрешността на квадрата MNPQ със страна a-d и център, съвпадащ с центъра на ABCD. Тогава по дефиниция:

$$P=\frac{(a-d)^2}{a^2}$$