

# Бейсовски подход за оценка на хармонични колебания с променлива амплитуда

Автор: Калоян Харалампиев

## Bayesian approach for estimation of harmonic oscillations with fluctuating amplitude

Author: Kaloyan Haralampiev

*Резюме: В статията са разгледани цикличните компоненти с променлива амплитуда, като за описание на променящата се амплитуда са използвани също хармонични модели. Показано е, че един хармоничен компонент с променлива амплитуда може да се представи като сума на два хармонични компонента с постоянна амплитуда. Но тъй като цялостният модел е сума от няколко хармонични компонента с постоянна амплитуда, възниква въпросът как да разберем кои двойки от хармонични компоненти са просто сума от два хармонични компонента с постоянна амплитуда и кои двойки формират хармонични компоненти с променлива амплитуда. Първата стъпка от отговора на този въпрос е да се оцени модел, който не е сума от отделни хармонични компоненти, а е сума от двойки хармонични компоненти. Но преди това в статията е показано как се оценява произволен модел. Втората стъпка е да се дефинира правило, което има формата на система от две неравенства. Само когато и двете неравенства са удовлетворени, само тогава може да се говори за цикличен компонент с променлива амплитуда. За илюстрация е разгледана динамиката на общото равнище на цените в България. Бяха установени 4 хармонични компонента с постоянна амплитуда, които описват тренда, и 12 хармонични компонента, които описват цикли. От тях 3 са с променлива амплитуда и 9 са с постоянна амплитуда. Полученият модел има много добра обяснителна сила – 99,8% от промяната на общото равнище на цените се обяснява от получения модел.*

*Ключови думи: бейсовски спектрален анализ; хармоничен компонент; постоянна амплитуда; променлива амплитуда; индекси на потребителските цени*

**Abstract:** This article examines cyclic components with fluctuating amplitude, where harmonic models are also used for description of the fluctuating amplitude. It is shown that a harmonic component with fluctuating amplitude can be represented as a sum of two harmonic components with constant amplitude. But since the overall model is a sum of several harmonic components with a constant amplitude, the question arises how to understand which pairs of harmonic components are simply a sum of two harmonic components with a constant amplitude and which pairs form harmonic components with fluctuating amplitude. The first step in answering this question is to evaluate a model that is not a sum of separate harmonic components but a sum of pairs of harmonic components. But before that, the article shows how to evaluate any model. The second step is to define a rule that takes the form of a system of two inequalities. Only when both inequalities are satisfied only then we can argue that there is a cyclic component with a fluctuating amplitude. For illustration, the dynamics of the price level in Bulgaria is examined. There are revealed 4 harmonic components with a constant amplitude describing the trend, and 12 harmonic components that describe cycles. Of these, 3 are with fluctuating amplitude and 9 are with constant amplitude. The resulting model has a very good explanatory power – 99.8% of the variation of the price level is explained by the obtained model.

**Keywords:** Bayesian spectrum analysis; harmonic component; constant amplitude; fluctuating amplitude; consumer price indices

JEL: C11, C22, C51

## 1. ВЪВЕДЕНИЕ

В монографията „Дългите вълни на Кондратиев при „социализма““ сме използвали модел, който е сума от хармонични компоненти, всеки от които е с постоянна амплитуда (Naydenov, Haralampiev, 2014: стр. 52):

$$f(t_i) = \sum_{j=1}^n \left[ A_j \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_j} + \varphi_j\right) \right], i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

където:

$t_i$  е времето,  $A_j$  е амплитудата на хармоничното колебание,  $T_j$  е периодът,  $\varphi_j$  е фазата, а  $n$  е дължината на времевия ред.

Също така сме изследвали циклични компоненти с променлив период (Naydenov, Haralampiev, 2014: стр. 180-203).

Освен това, могат да се изследват циклични компоненти с променлива амплитуда.

Бретхорст разглежда няколко различни функции за затихващи хармонични колебания (Bretthorst, 1988: стр. 93):

- Лоренцово затихване по честота (Lorenzian Decay in frequency):

$$f(t_i) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right) e^{-\alpha t_i} = [A \cdot e^{-\alpha t_i}] \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right)$$

- Лоренцово затихване по време (Lorenzian Decay in time):

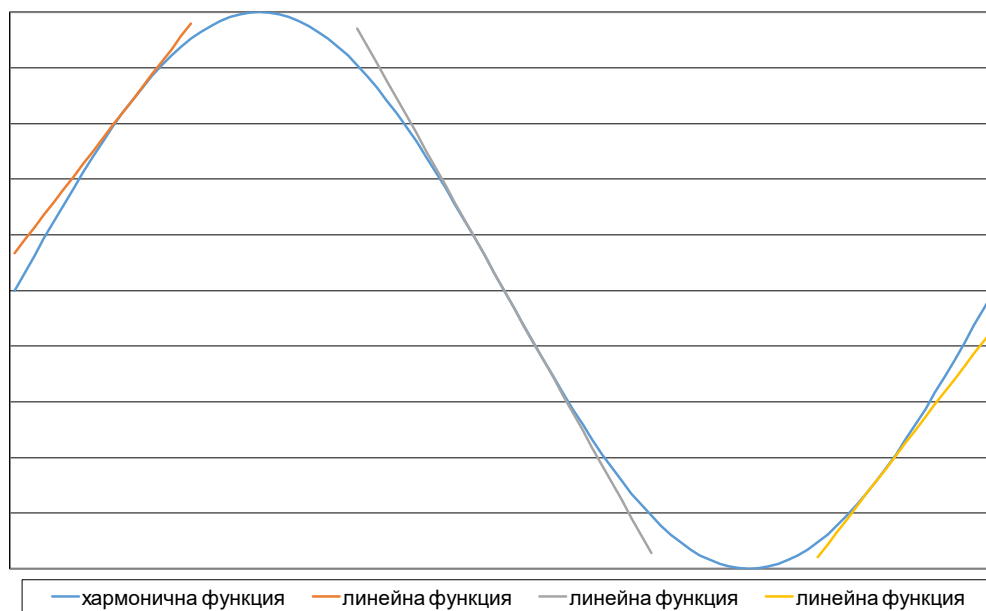
$$f(t_i) = \frac{A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right)}{1 + \alpha t_i^2} = [A \cdot (1 + \alpha t_i^2)^{-1}] \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right)$$

- Гаусово затихване по време (Gaussian Decay in time):

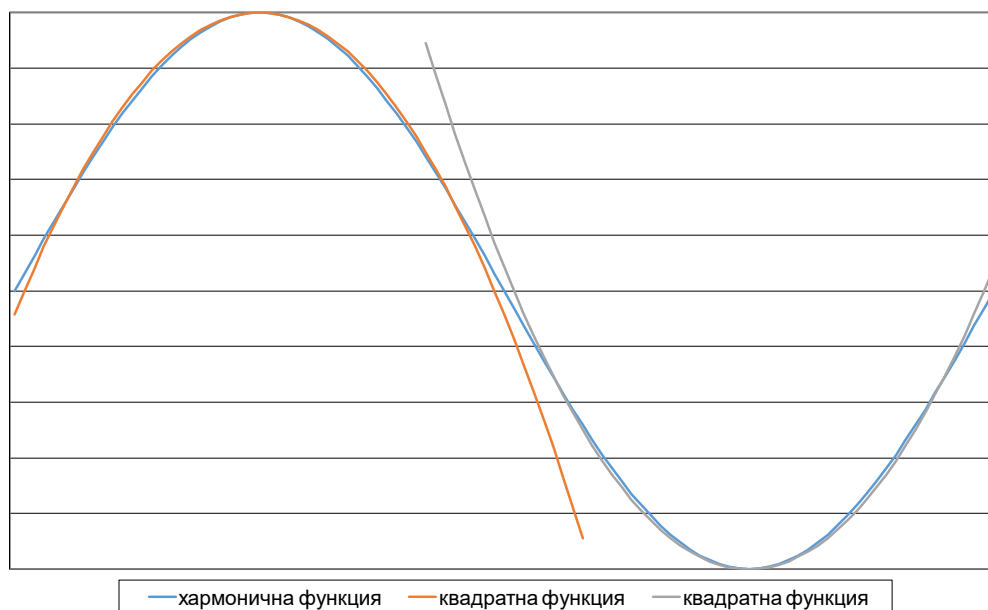
$$f(t_i) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right) e^{-\alpha t_i^2} = [A \cdot e^{-\alpha t_i^2}] \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right)$$

Общото между тези три функции е, че амплитудата на хармоничното колебание е функция на времето. Обаче в горесцитираната монография сме показали, че различни функции могат да се апроксимират с хармонични модели (Naydenov, Haralampiev, 2014: стр. 51-52):

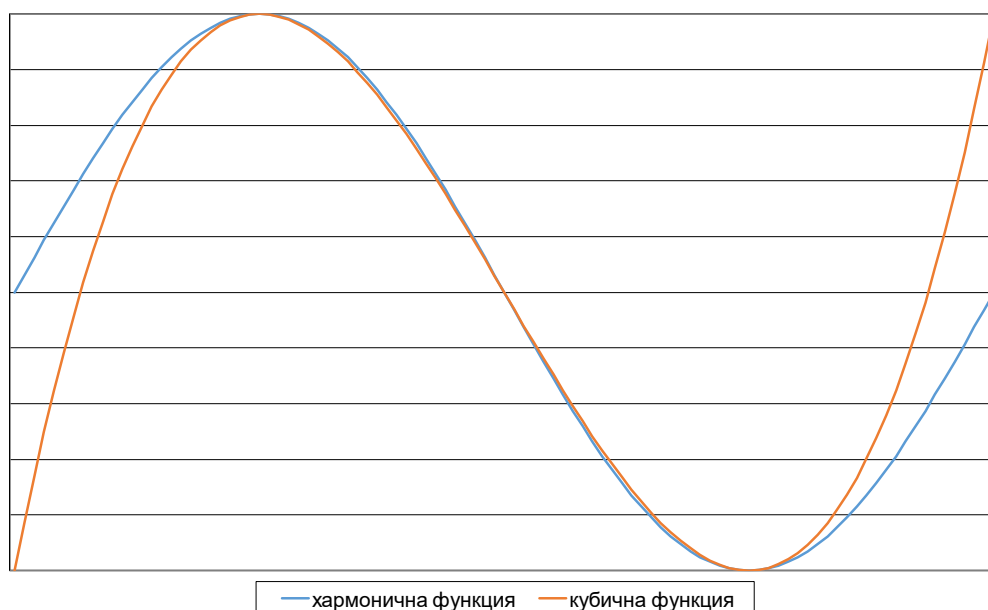
Фиг. 1. Хармонична апроксимация на линейни функции



Фиг. 2. Хармонична апроксимация на квадратни функции



Фиг. 3. Хармонична апроксимация на кубична функция



На базата на тези апроксимации беше изведено практическо правило за разграничаване на хармоничните компоненти, които описват тренда, от хармоничните компоненти, които описват цикли (Naydenov, Haralampiev, 2014: стр. 52), а именно:

- Ако периодът на хармоничния компонент е по-голям от дължината на времевия ред, то най-вероятно този хармоничен компонент описва тренда;
- Ако периодът на хармоничния компонент е по-малък от две трети от дължината на времевия ред, то най-вероятно този хармоничен компонент описва цикъл.

Това означава, че хармонични модели могат да се използват за описание на променящата се амплитуда. В такъв случай моделът на един конкретен хармоничен компонент с променлива амплитуда ще изглежда по следния начин:

$$f(t_i) = \left[ A_A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_A} + \varphi_A\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right), \quad (2)$$

където с индекс „А“ са указани амплитудата, периодът и фазата на хармоничния модел, с който е описана променящата се амплитуда.

Формула (2) може да се трансформира по следния начин:

$$\begin{aligned} f(t_i) &= \left[ A_A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_A} + \varphi_A\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T} + \varphi\right) = \dots = \\ &= \frac{A_A}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{\frac{T \cdot T_A}{T - T_A}} + \varphi_A - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A_A}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{\frac{T \cdot T_A}{T + T_A}} + \varphi_A + \varphi + \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Този резултат показва, че хармоничният компонент с променлива амплитуда може да се представи като сума на два хармонични компонента с постоянна амплитуда. Но формула (1) представлява модел, който е сума от няколко хармонични компонента с постоянна амплитуда. Тогава как да разберем кои двойки от тях са просто сума от два хармонични компонента с постоянна амплитуда и кои двойки формират хармонични компоненти с променлива амплитуда?

## 2. ОЦЕНЯВАНЕ НА МОДЕЛА

Първата стъпка от отговора на горния въпрос е да оценим модел, който не е сума от отделни хармонични компоненти, а е сума от двойки хармонични компоненти.

Но преди да покажем как се оценява такъв модел, ще покажем как се оценява произволен модел.

### 2.1. Оценка на произволен модел

Нека моделът е:

$$y_i = f(t_i) + \varepsilon_i \quad (3)$$

където  $y_i$  са фактическите стойности на времевия ред, а  $f(t_i)$  е произволна функция с параметри  $a_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Апостериорната вероятност на коефициентите  $a_k$  се получава по формулата:

$$P(a_k | DI) = \frac{P(D | a_k I) \cdot P(a_k | I)}{\sum_{l=1}^m [P(D | a_l I) \cdot P(a_l | I)]}, \quad (4)$$

където  $D$  са данните, а  $I$  е наличната априорна информация.  $P(D|a_k I)$  се нарича извадкова вероятност, извадково разпределение или правдоподобие,  $P(a_k|I)$  – априорна вероятност, а  $P(a_k|DI)$  – апостериорна вероятност.

Определянето на правдоподобие и априорната вероятност се извършва по метода на максималната ентропия.

За определянето на правдоподобие първо се изразяват остатъците (шумът):

$$\varepsilon_i = y_i - f(t_i) \quad (5)$$

Тези остатъци трябва да имат средна стойност нула и някаква дисперсия  $\sigma^2$ . Разпределението с максимална ентропия, което удовлетворява тези ограничения, е нормалното разпределение (Bretthorst, 1990: стр. 5-7).

Тъй като шумът е неизвестен, във формула (4) се появява нов неизвестен параметър –  $\sigma^2$ , който трябва да се добави и в априорната, и в апостериорната вероятност:

$$P(a_k \sigma^2 | DI) = \frac{P(D|a_k \sigma^2 I) \cdot P(a_k \sigma^2 | I)}{\sum_{l=1}^m [P(D|a_l \sigma^2 I) \cdot P(a_l \sigma^2 | I)]} \quad (6)$$

За определянето на априорната вероятност се приема, че коефициентите  $a_k$  и разсейването на остатъците са независими. Следователно:

$$P(a_k \sigma^2 | I) = P(\sigma^2 | I) \prod_{l=1}^m P(a_l | I)$$

Според метода на максималната ентропия, когато не разполагаме с никаква априорна информация за неизвестните параметри, тяхната априорна вероятност е константа (Bretthorst, 1990: стр. 5-7). Следователно:

$$P(a_k \sigma^2 | I) = const \quad (7)$$

Тогава формула (6) придобива вида:

$$P(a_k \sigma^2 | DI) = \frac{P(D|a_k \sigma^2 I) \cdot const}{\sum_{l=1}^m [P(D|a_l \sigma^2 I) \cdot const]} = \frac{P(D|a_k \sigma^2 I)}{\sum_{l=1}^m P(D|a_l \sigma^2 I)} \quad (8)$$

Тъй като сумата на правдоподобията играе ролята на т.нар. нормализираща константа, нейното изчисляване се налага, само когато е важна точната стойност на апостериорната вероятност. Понеже за по-нататъшното изложение точната стойност на апостериорната вероятност не е необходима, сумата на правдоподобията няма да бъде изчислявана, а само ще се използва фактът, че тя е константа. В такъв случай:

$$P(a_k \sigma^2 | DI) = \frac{P(D|a_k \sigma^2 I)}{\sum_{l=1}^m P(D|a_l \sigma^2 I)} \propto P(D|a_k \sigma^2 I) \quad (9)$$

Тоест, апостериорната вероятност е пропорционална на правдоподобие. А както беше посочено по-горе, правдоподобие има нормално разпределение:

$$P(D|a_k\sigma^2I) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\varepsilon_i-0)^2}{2\sigma^2}} \right] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

Тогава максимизирането на апостериорната вероятност всъщност е максимизиране на правдоподобие:

$$P(a_k\sigma^2|DI) = \max \rightarrow P(D|a_k\sigma^2I) = \max$$

За максимизиране на правдоподобие трябва първите частни производни на формула (10) да се приравнят на нула:

$$\begin{cases} \frac{dP(D|a_k\sigma^2I)}{da_k} = 0 \\ \frac{dP(D|a_k\sigma^2I)}{d\sigma^2} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Първото уравнение от системата (11) може да се представи по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{dP(D|a_k\sigma^2I)}{da_k} &= -\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{2\sigma^2}} \frac{d\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{2\sigma^2} \frac{d\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{da_k} = 0 \\ \frac{1}{2\sigma^2} \frac{d\sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i)]^2}{da_k} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{d[y_i - f(t_i)]^2}{da_k} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \left\{ 2[y_i - f(t_i)] \frac{df(t_i)}{da_k} \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \left[ y_i \frac{df(t_i)}{da_k} \right] &= \sum_{i=1}^n \left[ f(t_i) \frac{df(t_i)}{da_k} \right] \end{aligned}$$

Второто уравнение от системата (11) може да се представи по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{dP(D|a_k\sigma^2I)}{d\sigma^2} &= \frac{d \left[ \frac{(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-(\sigma^2)^{-1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \right]}{d\sigma^2} = 0 \\ -\frac{n}{2} \frac{(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-(\sigma^2)^{-1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} &+ \frac{(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-(\sigma^2)^{-1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} (\sigma^2)^{-1-1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 0 \\ -n + (\sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 &= 0 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n} \end{aligned}$$

Тогава системата (11) придобива вида:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left[ y_i \frac{df(t_i)}{da_k} \right] = \sum_{i=1}^n \left[ f(t_i) \frac{df(t_i)}{da_k} \right] \\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n} \end{cases} \quad (12)$$

Изхождайки от второто уравнение в система (12) и замествайки във формула (10), получаваме:

$$P(D|a_k \sigma^2 I) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{n\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi e\sigma^2})^n} \quad (13)$$

Тоест, правдоподобие то е обратнопропорционално на дисперсията на остатъците, като при това влиянието на дисперсията е усилено от повдигането на степен  $\frac{n}{2}$ . Оказва се, че дисперсията на остатъците е единственият важен параметър за оценяването на правдоподобие то и, следователно, за апостериорната вероятност.

Дисперсията на остатъците обаче има и още две важни функции в модела. За целта нека да означим дисперсията на остатъците (шума) след включването в модела на  $j$ -тата двойка хармонични компоненти с  $\sigma_j^2$ , а с  $\sigma_0^2$  – общата дисперсия на изходните данни.

Тогава, първо:

$R_j^2 = 1 - \frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2}$  е коефициентът на определеност на целия модел след включването на  $j$ -тата двойка хармонични компоненти,

$R_{j/j-1}^2 = 1 - \frac{\sigma_j^2}{\sigma_{j-1}^2}$  е коефициентът на определеност на конкретната двойка хармонични компоненти спрямо остатъците след включването в модела на всички предходни двойки хармонични компоненти.

Лесно се установява, че между двата коефициента на определеност съществува връзка:

$$1 - R_j^2 = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \dots \frac{\sigma_j^2}{\sigma_{j-1}^2} = (1 - R_{1/0}^2)(1 - R_{2/1}^2) \dots (1 - R_{j/j-1}^2) \quad (14)$$

Но това е връзката между множествения коефициент на определеност и частните коефициенти на определеност от различен порядък (Gatev et al., 1991, стр. 277-278). Тоест от формално-математическа гледна точка  $R_{j/j-1}^2$  са частни коефициенти на определеност. Но има и съдържателен аргумент за това – тези коефициенти измерват силата на връзката между конкретна двойка хармонични компоненти и изходните данни, при условие че е отстранено влиянието на всички предходни двойки хармонични компоненти. Така че  $R_j^2$  всъщност е множествен коефициент на определеност, а  $R_{j/j-1}^2$  е частен коефициент на определеност.



Второ, тъй като при минимална дисперсия на остатъците се максимизира правдоподобие, то формула (13) може да се замени в бейсовския информационен критерий:

$$BIC = m \cdot \ln(n) - 2 \cdot \ln \frac{1}{(\sqrt{2\pi e \sigma^2})^n} = m \cdot \ln(n) - 2 \cdot \ln(2\pi e \sigma^2)^{\frac{n}{2}} = m \cdot \ln(n) + n \cdot \ln(2\pi e \sigma^2) \quad (15)$$

## 2.2. Оценяване на модел с два хармонични компонента

Моделът с два хармонични компонента има следния вид:

$$f(t_i) = a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \quad (16)$$

За да се получи първото уравнение от система (12), най-напред се изчисляват производните на горната функция спрямо всеки от неизвестните параметри:

$$\frac{df(t_i)}{da_1} = \cos \frac{2\pi t_i}{T_1}$$

$$\frac{df(t_i)}{db_1} = \sin \frac{2\pi t_i}{T_1}$$

$$\frac{df(t_i)}{da_2} = \cos \frac{2\pi t_i}{T_2}$$

$$\frac{df(t_i)}{db_2} = \sin \frac{2\pi t_i}{T_2}$$

$$\frac{df(t_i)}{dT_1} = \frac{2\pi t_i}{T_1^2} \left( a_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} - b_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right)$$

$$\frac{df(t_i)}{dT_2} = \frac{2\pi t_i}{T_2^2} \left( a_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} - b_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right)$$

Тогава системата (12) придобива вида:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left( y_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right] \\
 \sum_{i=1}^n \left( y_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right] \\
 \sum_{i=1}^n \left( y_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right] \\
 \sum_{i=1}^n \left( y_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right] \\
 \sum_{i=1}^n \left[ y_i \frac{2\pi t_i}{T_1^2} \left( a_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} - b_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) \right] &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \frac{2\pi t_i}{T_1^2} \left( a_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} - b_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) \right] \\
 \sum_{i=1}^n \left[ y_i \frac{2\pi t_i}{T_2^2} \left( a_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} - b_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \right] &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( a_1 \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} + b_1 \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} + b_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \frac{2\pi t_i}{T_2^2} \left( a_2 \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} - b_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) \right] \\
 \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}
 \end{aligned}$$

За облекчаване на изложението сме използвали означенията на Bretthorst (1990: стр. 10). Също така въвеждаме и нови означения:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left( y_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= R_1 & \sum_{i=1}^n \left( y_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= R_2 \\
 \sum_{i=1}^n \left( y_i t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= R_{1t} & \sum_{i=1}^n \left( y_i t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= R_{2t} \\
 \sum_{i=1}^n \left( y_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= I_1 & \sum_{i=1}^n \left( y_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= I_2 \\
 \sum_{i=1}^n \left( y_i t_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= I_{1t} & \sum_{i=1}^n \left( y_i t_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= I_{2t} \\
 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{2\pi t_i}{T_1} &= c_1 & \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{2\pi t_i}{T_2} &= c_2 \\
 \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos^2 \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= c_{1t} & \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos^2 \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= c_{2t} \\
 \sum_{i=1}^n \left( \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= c_{12} & \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= c_{12t} \\
 \sum_{i=1}^n \sin^2 \frac{2\pi t_i}{T_1} &= s_1 & \sum_{i=1}^n \sin^2 \frac{2\pi t_i}{T_2} &= s_2 \\
 \sum_{i=1}^n \left( t_i \sin^2 \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= s_{1t} & \sum_{i=1}^n \left( t_i \sin^2 \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= s_{2t} \\
 \sum_{i=1}^n \left( \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= s_{12} & \sum_{i=1}^n \left( t_i \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= s_{12t} \\
 \sum_{i=1}^n \left( \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= m_{11} & \sum_{i=1}^n \left( \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= m_{22} \\
 \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= m_{11t} & \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= m_{22t} \\
 \sum_{i=1}^n \left( \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= m_{12} & \sum_{i=1}^n \left( \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= m_{21} \\
 \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_1} \sin \frac{2\pi t_i}{T_2} \right) &= m_{12t} & \sum_{i=1}^n \left( t_i \cos \frac{2\pi t_i}{T_2} \sin \frac{2\pi t_i}{T_1} \right) &= m_{21t}
 \end{aligned}$$

Тогава системата придобива вида:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= a_1 c_1 + b_1 m_{11} + a_2 c_{12} + b_2 m_{12} \\
 I_1 &= a_1 m_{11} + b_1 s_1 + a_2 m_{21} + b_2 s_{12} \\
 R_2 &= a_1 c_{12} + b_1 m_{21} + a_2 c_2 + b_2 m_{22} \\
 I_2 &= a_1 m_{12} + b_1 s_{12} + a_2 m_{22} + b_2 s_2 \\
 a_1 I_{1t} - b_1 R_{1t} &= a_1^2 m_{11t} - a_1 b_1 c_{1t} + a_1 b_1 s_{1t} - b_1^2 m_{11t} + a_1 a_2 m_{21t} - a_2 b_1 c_{12t} + a_1 b_2 s_{12t} - b_1 b_2 m_{12t} \\
 a_2 I_{2t} - b_2 R_{2t} &= a_1 a_2 m_{12t} - a_1 b_2 c_{12t} + a_2 b_1 s_{12t} - b_1 b_2 m_{21t} + a_2^2 m_{22t} - a_2 b_2 c_{2t} + a_2 b_2 s_{2t} - b_2^2 m_{22t} \\
 \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Тази система има няколко особености.

Първо, първите шест уравнения не зависят от разсейването.

Второ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  и  $b_2$  могат да се изразят само от първите четири уравнения:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{m_{11}[I_1(c_2s_2 - m_{22}^2) + m_{21}(I_2m_{22} - R_2s_2) + (R_2m_{22} - I_2c_2)s_{12}] + R_1[s_1(m_{22}^2 - c_2s_2) + m_{21}^2s_2 + c_2s_{12}^2 - 2m_{21}m_{22}s_{12}] + c_{12}[s_1(R_2s_2 - I_2m_{22}) - I_1m_{21}s_2 - R_2s_{12}^2 + (I_1m_{22} + I_2m_{21})s_{12}] + m_{12}[(R_2m_{21} - I_1c_2)s_{12} + (I_2c_2 - R_2m_{22})s_1 + I_1m_{21}m_{22} - I_2m_{21}^2]}{c_1[s_1(m_{22}^2 - c_2s_2) + m_{21}^2s_2 + c_2s_{12}^2 - 2m_{21}m_{22}s_{12}] + c_{12}^2(s_1s_2 - s_{12}^2) + 2c_{12}m_{11}(m_{22}s_{12} - m_{21}s_2) + m_{11}^2(c_2s_2 - m_{22}^2) + 2m_{12}[c_{12}(m_{21}s_{12} - m_{22}s_1) + m_{11}(m_{21}m_{22} - c_2s_{12})] + m_{12}^2(c_2s_1 - m_{21}^2)} \\
 b_1 &= -\frac{c_1[I_1(c_2s_2 - m_{22}^2) + m_{21}(I_2m_{22} - R_2s_2) + (R_2m_{22} - I_2c_2)s_{12}] + m_{11}[R_1(m_{22}^2 - c_2s_2) + c_{12}(R_2s_2 - I_2m_{22})] + R_1c_{12}(m_{21}s_2 - m_{22}s_{12}) + c_{12}^2(I_2s_{12} - I_1s_2) + m_{12}[R_1(c_2s_{12} - m_{21}m_{22}) + c_{12}(-R_2s_{12} + 2I_1m_{22} - I_2m_{21}) + m_{11}(I_2c_2 - R_2m_{22})] + m_{12}^2(R_2m_{21} - I_1c_2)}{c_1[s_1(m_{22}^2 - c_2s_2) + m_{21}^2s_2 + c_2s_{12}^2 - 2m_{21}m_{22}s_{12}] + c_{12}^2(s_1s_2 - s_{12}^2) + 2c_{12}m_{11}(m_{22}s_{12} - m_{21}s_2) + m_{11}^2(c_2s_2 - m_{22}^2) + 2m_{12}[c_{12}(m_{21}s_{12} - m_{22}s_1) + m_{11}(m_{21}m_{22} - c_2s_{12})] + m_{12}^2(c_2s_1 - m_{21}^2)} \\
 a_2 &= \frac{m_{11}[R_1(m_{22}s_{12} - m_{21}s_2) + c_{12}(I_2s_{12} - I_1s_2)] + c_1[s_1(I_2m_{22} - R_2s_2) + I_1m_{21}s_2 + R_2s_{12}^2 - (I_1m_{22} + I_2m_{21})s_{12}] + R_1c_{12}(s_1s_2 - s_{12}^2) + m_{11}^2(R_2s_2 - I_2m_{22}) + m_{12}[R_1(m_{21}s_{12} - m_{22}s_1) + m_{11}(-2R_2s_{12} + I_1m_{22} + I_2m_{21}) + c_{12}(I_1s_{12} - I_2s_1)] + m_{12}^2(R_2s_1 - I_1m_{21})}{c_1[s_1(m_{22}^2 - c_2s_2) + m_{21}^2s_2 + c_2s_{12}^2 - 2m_{21}m_{22}s_{12}] + c_{12}^2(s_1s_2 - s_{12}^2) + 2c_{12}m_{11}(m_{22}s_{12} - m_{21}s_2) + m_{11}^2(c_2s_2 - m_{22}^2) + 2m_{12}[c_{12}(m_{21}s_{12} - m_{22}s_1) + m_{11}(m_{21}m_{22} - c_2s_{12})] + m_{12}^2(c_2s_1 - m_{21}^2)} \\
 b_2 &= \frac{m_{11}[R_1(m_{21}m_{22} - c_2s_{12}) + c_{12}(R_2s_{12} + I_1m_{22} - 2I_2m_{21})] + c_1[(I_1c_2 - R_2m_{21})s_{12} + (R_2m_{22} - I_2c_2)s_1 - I_1m_{21}m_{22} + I_2m_{21}^2] + R_1c_{12}(m_{21}s_{12} - m_{22}s_1) + c_{12}^2(I_2s_1 - I_1s_{12}) + m_{12}[R_1(c_2s_1 - m_{21}^2) + c_{12}(I_1m_{21} - R_2s_1) + m_{11}(R_2m_{21} - I_1c_2)] + m_{12}^2(I_2c_2 - R_2m_{22})}{c_1[s_1(m_{22}^2 - c_2s_2) + m_{21}^2s_2 + c_2s_{12}^2 - 2m_{21}m_{22}s_{12}] + c_{12}^2(s_1s_2 - s_{12}^2) + 2c_{12}m_{11}(m_{22}s_{12} - m_{21}s_2) + m_{11}^2(c_2s_2 - m_{22}^2) + 2m_{12}[c_{12}(m_{21}s_{12} - m_{22}s_1) + m_{11}(m_{21}m_{22} - c_2s_{12})] + m_{12}^2(c_2s_1 - m_{21}^2)}
 \end{aligned}$$

Трето, ако резултатите от формулите за  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  и  $b_2$  се заместят в петото и шестото уравнение на системата, ще се получат уравнения спрямо  $T_1$  и  $T_2$ . За съжаление решаването на тези две уравнения е извън нашите възможности<sup>1</sup>. Затова предлагаме косвен подход за справяне с проблема. Той се изразява в следното:

а) За всяка двойка цели<sup>2</sup> стойности  $2 \leq T_1 < T_2 < \infty^3$  се изчисляват стойностите на  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  и  $b_2$ , а оттам и дисперсията на остатъците. След това така получените дисперсии се сравняват и се търсят онези стойности на  $T_1$  и  $T_2$ , за които дисперсията на остатъците е най-малка<sup>4</sup>.

б) Чрез описаната последователност се идентифицира най-вероятната двойка хармонични компоненти в изходния времеви ред. Ако има и друга двойка хармонични компоненти, тя се търси в остатъците, изчислени по формула (5). Третата двойка хармонични компоненти се търси в остатъците на остатъците и т.н.

В резултат на това времевият ред бива описан със сума от двойки хармонични компоненти:

$$f(t_i) = \sum_{j=1}^w \left[ A_{1j} \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_{1j}} + \varphi_{1j}\right) + A_{2j} \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_{2j}} + \varphi_{2j}\right) \right] \quad (18)$$

където:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \quad (19)$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arctg \frac{a_1}{b_1}; \text{ при } b_1 > 0 \\ \arctg \frac{a_1}{b_1} + \pi; \text{ при } b_1 < 0 \end{cases} \quad \varphi_2 = \begin{cases} \arctg \frac{a_2}{b_2}; \text{ при } b_2 > 0 \\ \arctg \frac{a_2}{b_2} + \pi; \text{ при } b_2 < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Основният въпрос тук е каква е стойността на  $w$ , защото е видно, че гореописаната процедура може да продължава до безкрайност. Тоест, трябва да има критерий за спиране на повторенията. Като такъв критерий е избран бейсовският информационен критерий. Процедурата спира, когато  $BIC_{w+1} > BIC_w$ .

Съгласно формула (15):

$$\begin{aligned} BIC_{w+1} - BIC_w &= 4(w+1) \cdot \ln(n) + n \cdot \ln(2\pi e \sigma_{w+1}^2) - 4w \cdot \ln(n) - n \cdot \ln(2\pi e \sigma_w^2) = \\ &= 4 \cdot \ln(n) + \ln(2\pi e \sigma_{w+1}^2)^n - \ln(2\pi e \sigma_w^2)^n = \ln \left[ \frac{n^4 \cdot (2\pi e \sigma_{w+1}^2)^n}{(2\pi e \sigma_w^2)^n} \right] = \\ &= \ln \left[ n^4 \cdot (1 - R_{w+1/w}^2)^n \right] > 0 = \ln(1) \\ & \quad n^4 \cdot (1 - R_{w+1/w}^2)^n > 1 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Нещо повече, трудно е да се твърди дали то е решимо по принцип или не е.

<sup>2</sup> Използвани са само цели стойности на  $T_1$  и  $T_2$ , защото при всяко конкретно изследване времето е прекъсната величина.

<sup>3</sup> На практика трябва да се даде конкретно числово изражение на безкрайността. Ние работим с най-голям период  $T_2=10\ 000$ .

<sup>4</sup> Тъй като това по същество е оптимизационна задача, решението е направено с MS Excel Solver.

$$1 - R_{w+1/w}^2 > \frac{1}{\sqrt[n]{n^4}}$$

$$R_{w+1/w}^2 < 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n^4}} \quad (21)$$

Тоест, критерият за спиране на процедурата може да се сведе до големината на частния коефициент на определеност.

### 3. ХАРМОНИЧНИ КОМПОНЕНТИ С ПРОМЕНЛИВА АМПЛИТУДА

Нека в една двойка хармонични компоненти  $A_1 > A_2$ . Тогава:

$$A_1 \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_1} + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_2} + \varphi_2\right) =$$

$$= A_2 \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_1} + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_2} + \varphi_2\right) + (A_1 - A_2) \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_1} + \varphi_1\right) =$$

$$= \left[ 2A_2 \sin\left(\frac{2\pi t_i}{\pm T_1 \mp T_2} + \frac{\mp \varphi_1 \pm \varphi_2 + \pi}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi t_i}{\frac{T_1 T_2}{\pm T_1 \mp T_2}} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) + (A_1 - A_2) \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T_1} + \varphi_1\right) \quad (22)$$

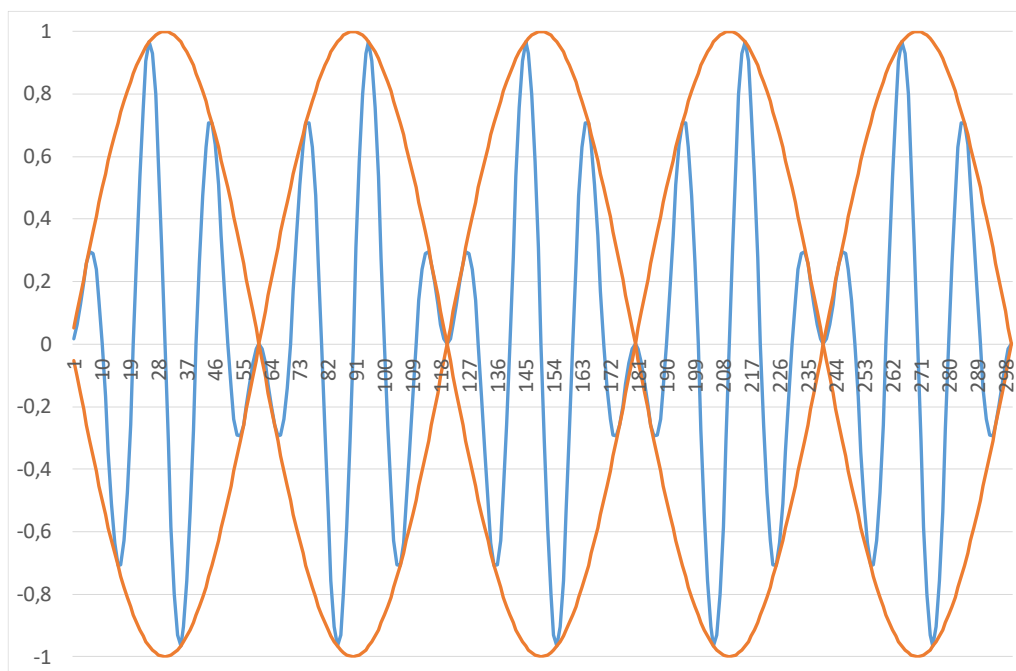
Първото събираемо от формула (22) представлява хармоничен компонент с променлива амплитуда, като самата променлива амплитуда също се описва с хармоничен модел с амплитуда  $2A_2$  и период  $T_A = \frac{2T_1 T_2}{\pm T_1 \mp T_2} = \frac{2T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$ , а цикълът от своя страна има период  $T = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ .

За да говорим обаче за цикъл с променлива амплитуда, трябва неговият период да е по-малък от две трети от дължината на времевия ред:

$$T = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} < \frac{2}{3}n \quad (23)$$

От друга страна обаче на пръв поглед трябва периодът на цикъла да е по-малък и от две трети от периода на хармоничния компонент, който описва променливата амплитуда. Но трябва да се съобразим с факта, че след като променливата амплитуда се описва с хармоничен компонент, тя може да приема и положителни и отрицателни стойности, а по принцип амплитудата трябва да е положително число. Така че трябва да вземем хармоничният компонент, който описва променливата амплитуда, по абсолютна стойност, а това означава, че периодът на цикъла трябва да е по-малък от двете трети от половината на периода на хармоничния компонент, който описва променливата амплитуда. Това се илюстрира добре на следната фигура:

Фиг. 4. Хармоничен компонент с променлива амплитуда, чийто период е шест пъти по-голям от периода на цикъла



Тоест, трябва:

$$T < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} T_A = \frac{1}{3} T_A \tag{24}$$

От своя страна съотношението между двата периода е:

$$\frac{T_A}{T} = \frac{T_1 + T_2}{|T_1 - T_2|}$$

Оттук:

$$T = \frac{|T_1 - T_2|}{T_1 + T_2} T_A < \frac{1}{3} T_A$$

Откъдето:

$$\frac{T_1 + T_2}{|T_1 - T_2|} > 3$$

Следователно, имаме две условия, които формират система:

$$\begin{cases} \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} < \frac{2}{3}n \\ \frac{T_1 + T_2}{|T_1 - T_2|} > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2T_1T_2}{n(T_1+T_2)} < \frac{2}{3} \\ \frac{T_1+T_2}{|T_1-T_2|} > 3 \end{cases} \tag{25}$$

Само когато и двете неравенства в системата (25) са удовлетворени, само тогава можем да говорим за цикличен компонент с променлива амплитуда.

#### 4. ИЛЮСТРАТИВЕН ПРИМЕР

Ще разгледаме динамиката на общото равнище на цените в България. Данните за периода от май 1990 година<sup>5</sup> до декември 1994 година са взети от статистическите годишници на Националния статистически институт (НСИ), а за периода от януари 1995 година до май 2019 година от Инфостат. За да се получи общото равнище на цените, са преизчислени базисните индекси на потребителските цени при база май 1990 година = 100%.

Върху така получения времеви ред е приложена процедурата от точка 2, след което са приложени критериите от система (25). Получените резултати са представени в Таблица 1.

Табл. 1. Резултати от бейсовския спектрален анализ за времевия ред на базисните индекси на потребителските цени при база май 1990 година = 100%

$j$	$T_1$	$A_1$	$\varphi_1$	$T_2$	$A_2$	$\varphi_2$	$\frac{2T_1T_2}{n(T_1+T_2)}$	$\frac{T_1+T_2}{ T_1-T_2 }$	
1	405	62788,03	4,57	10000	2117816,27	0,01	2,231	1,084	Не
2	129	29251,23	2,02	10000	28784,58	-0,02	0,730	1,026	Не
3	95	15372,89	0,82	233	10087,71	-1,36	0,387	2,377	Не
4	43	10489,25	0,58	60	12088,53	4,13	0,144	6,059	Да
5	48	6769,04	1,53	74	10021,45	-0,33	0,167	4,692	Да
6	32	5939,25	2,59	9543	2177,39	3,82	0,183	1,007	Не
7	26	5184,57	-1,16	40	4497,23	0,13	0,090	4,714	Да
8	35	4581,49	3,81	141	3175,93	1,06	0,161	1,660	Не

Източник: собствени изчисления

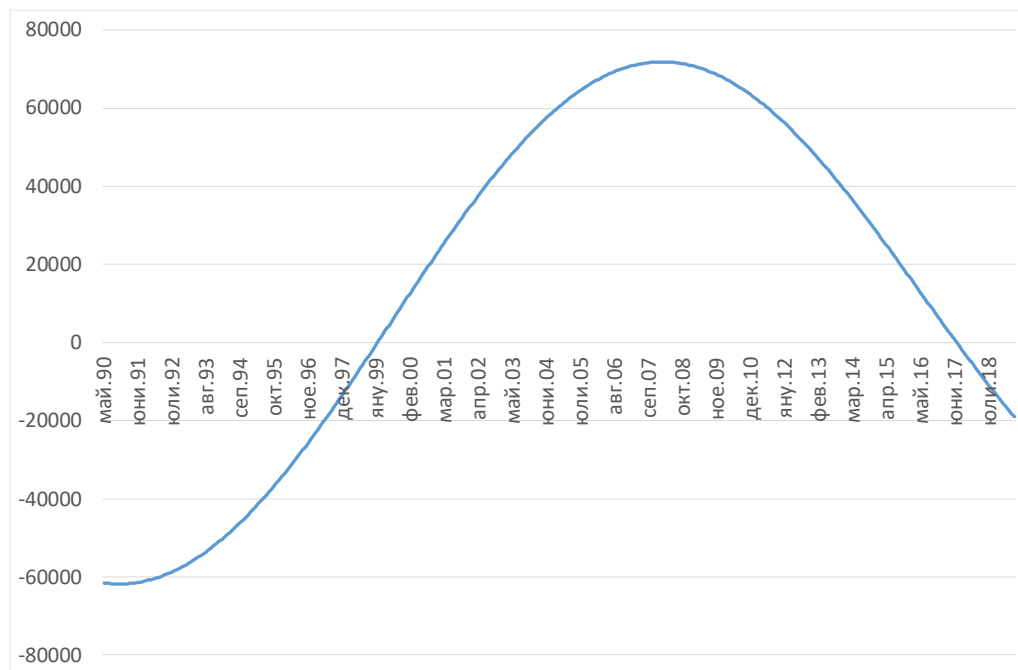
За емпирична проверка на правилото от система (25) са направени графиките на първото събираемо на формула (22) за всяка двойка хармонични компоненти.

- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 405$  и  $T_2 = 10000$ . Няма хармоничен компонент с променлива амплитуда.

<sup>5</sup> Общият индекс на потребителските цени се изчислява от НСИ от май 1990 година. (Виж „Времеви обхват“ в „Метаданни и методология“, <http://nsi.bg/bg/content/2445/%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BB%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F-%D0%B8-%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B8-%D0%BD%D0%B0-%D0%BF%D0%BE%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%B1%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%82%D0%B5-%D1%86%D0%B5%D0%BD%D0%B8>)

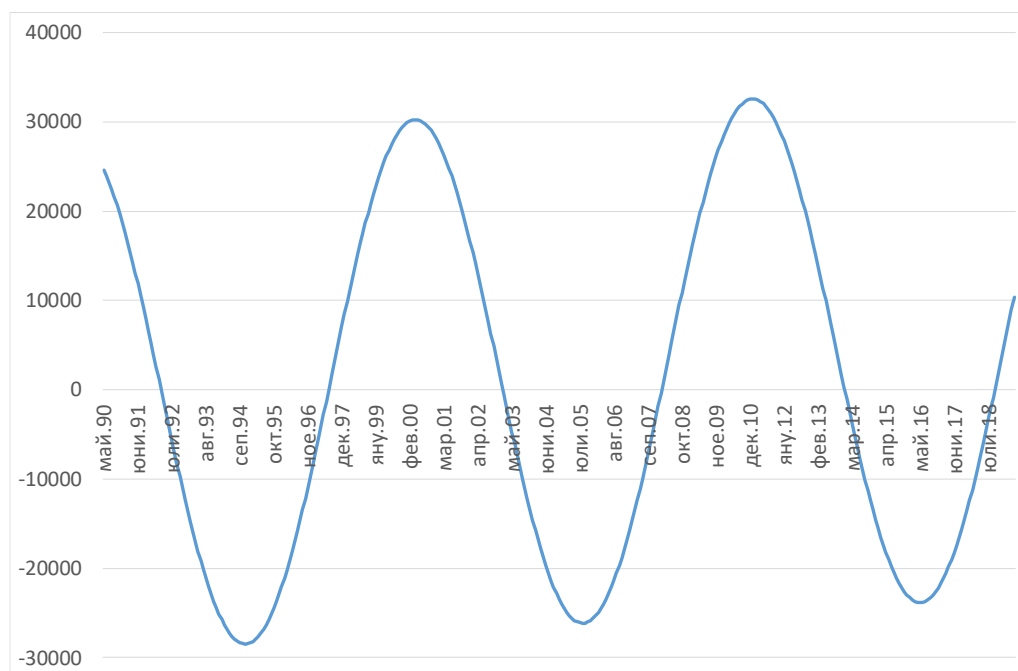


Фиг. 5. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 405$  и  $T_2 = 10000$



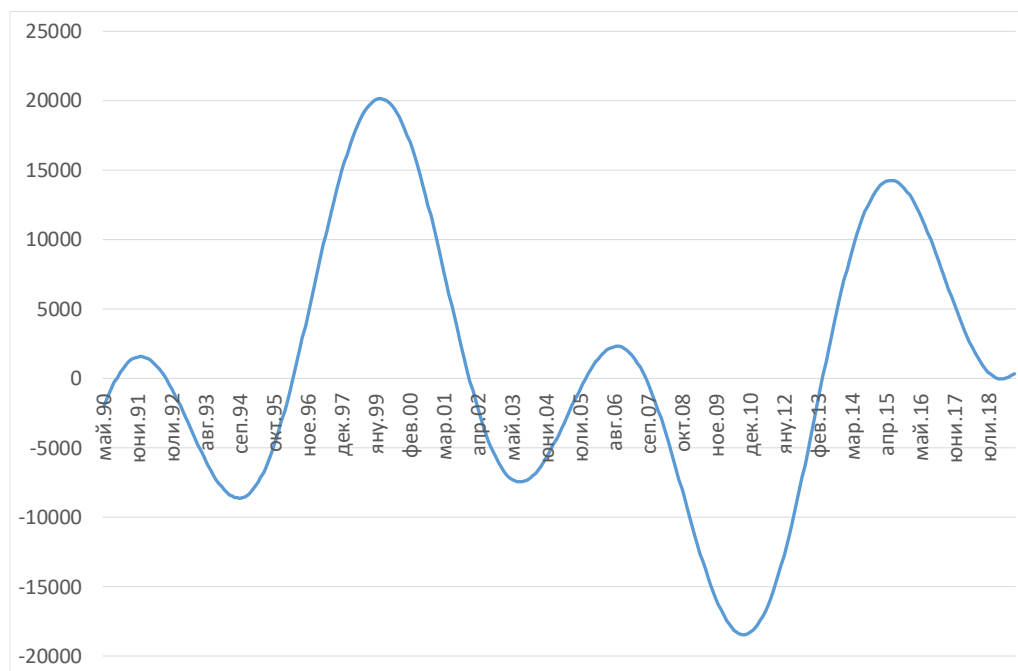
- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 129$  и  $T_2 = 10000$ . Няма хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 6. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 129$  и  $T_2 = 10000$



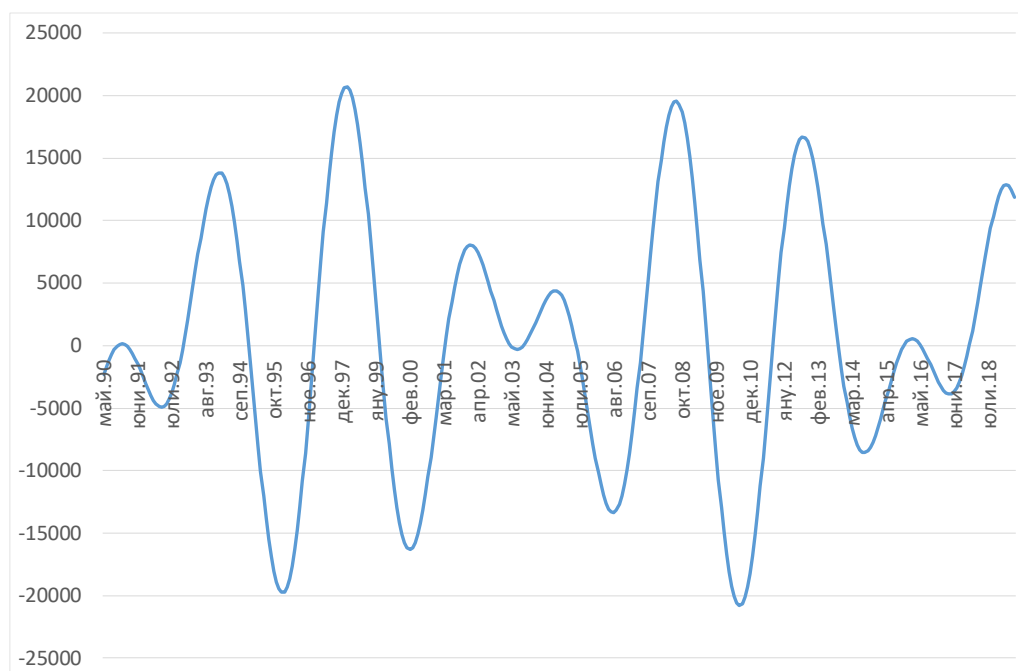
- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 95$  и  $T_2 = 233$ . Няма хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 7. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 95$  и  $T_2 = 233$



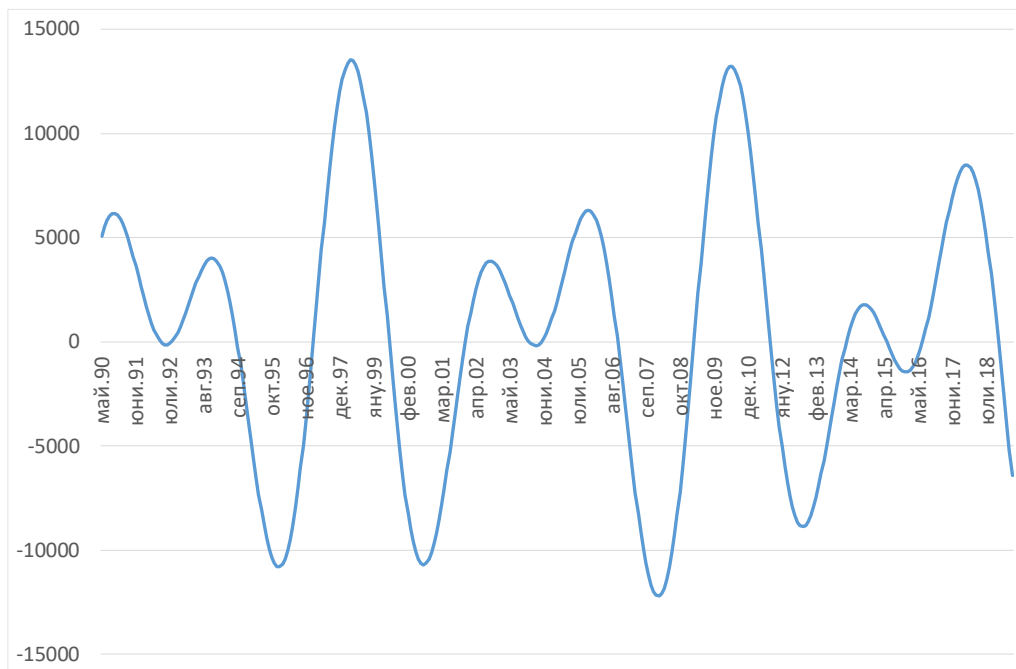
- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 43$  и  $T_2 = 60$ . Има хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 8. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 43$  и  $T_2 = 60$



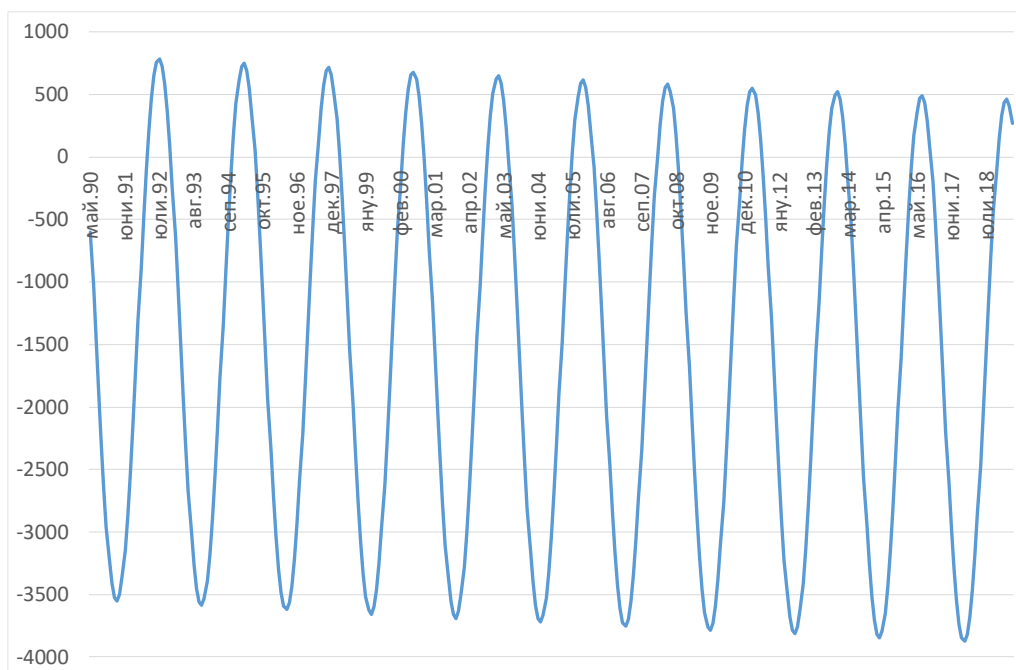
- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 48$  и  $T_2 = 74$ . Има хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 9. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 48$  и  $T_2 = 74$



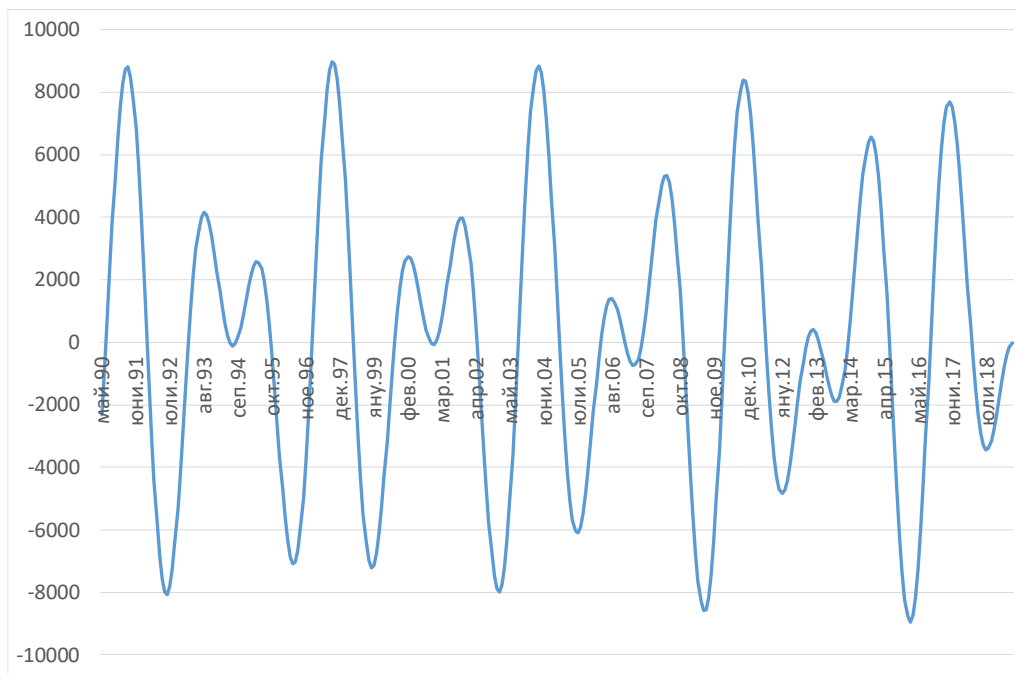
- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 32$  и  $T_2 = 9543$ . Няма хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 10. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 32$  и  $T_2 = 9543$



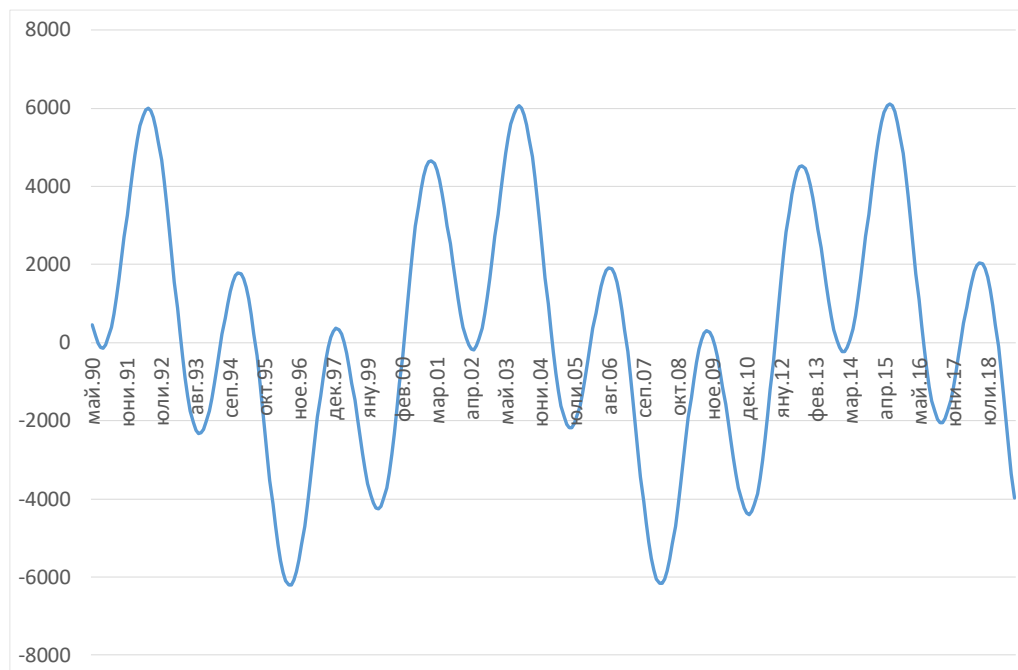
- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 26$  и  $T_2 = 40$ . Има хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 11. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 26$  и  $T_2 = 40$



- Двойка хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 35$  и  $T_2 = 141$ . Няма хармоничен компонент с променлива амплитуда.

Фиг. 12. Сума от хармонични компоненти с периоди  $T_1 = 35$  и  $T_2 = 141$



След приложението на формула (22) Таблица 1 може да бъде преработена по следния начин:

Табл. 2. Циклични компоненти с постоянна и с променлива амплитуда за времеви ред на базисните индекси на потребителските цени при база май 1990 година = 100%

$j$	$T_1$	$A_1$	$\varphi_1$	$T_2$	$A_2$	$\varphi_2$	$R^2_{j/j-1}$	$R^2_j$
1	405	62788,03	4,57	10000	2117816,27	0,01	96,7%	96,7%
2	129	29251,23	2,02	10000	28784,58	-0,02	46,6%	98,3%
3	95	15372,89	0,82	233	10087,71	-1,36	34,0%	98,8%
4	50	$20978,50 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{304} - 0,20\right)$	2,36	60	1599,28	4,13	38,4%	99,3%
5	58	$13538,08 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{273} + 2,50\right)$	0,60	74	3252,41	-0,33	34,2%	99,5%
6	32	5939,25	2,59	9543	2177,39	3,82	16,2%	99,6%
7	32	$8994,46 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_i}{149} + 0,93\right)$	-0,52	26	687,34	-1,16	23,2%	99,7%
8	35	4581,49	3,81	141	3175,93	1,06	18,8%	99,8%

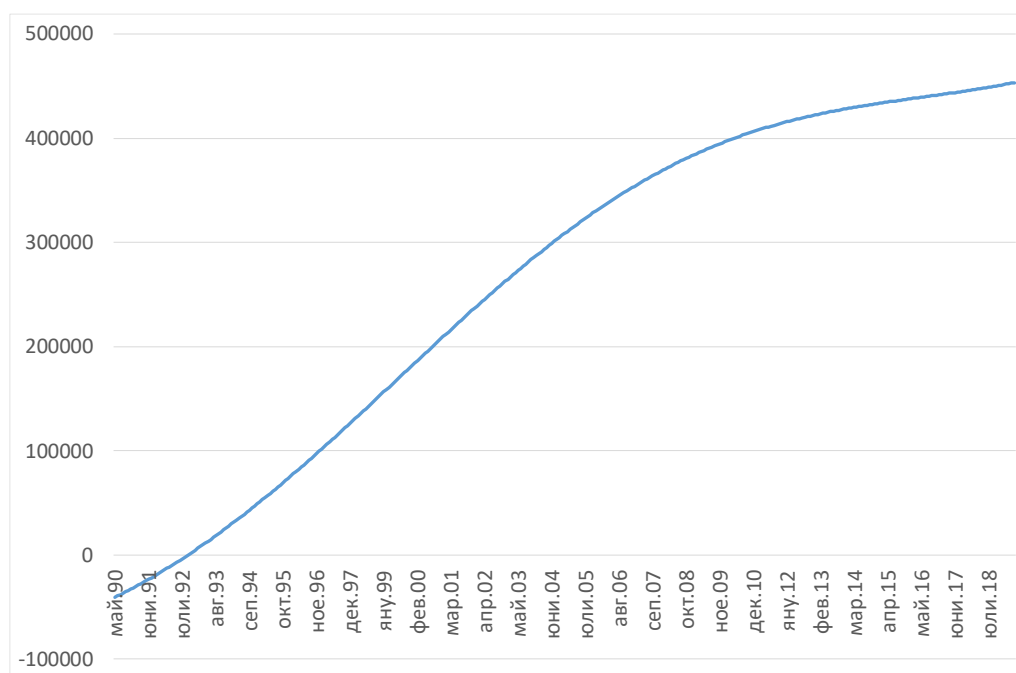
Източник: собствени изчисления

Изрично трябва да се отбележи, че моделът, описан в Таблица 1, е математически идентичен с модела, описан в Таблица 2. Така че, използването на хармонични компоненти с променлива амплитуда не допринася нищо към точността на модела. Хармоничните компоненти с променлива амплитуда са важни за по-добрата интерпретация и по-доброто разбиране на динамиката на изследвания времеви ред.

## 5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Както беше посочено по-горе, всички хармонични компоненти, които са с период по-голям от дължината на времевия ред, описват тренда. В конкретния пример такива са четири хармонични компонента: два с период 10000 месеца, един с период 9543 месеца и един с период 405 месеца.

Фиг. 13. Тренд във времевия ред на на базисните индекси на потребителските цени при база май 1990 година = 100%

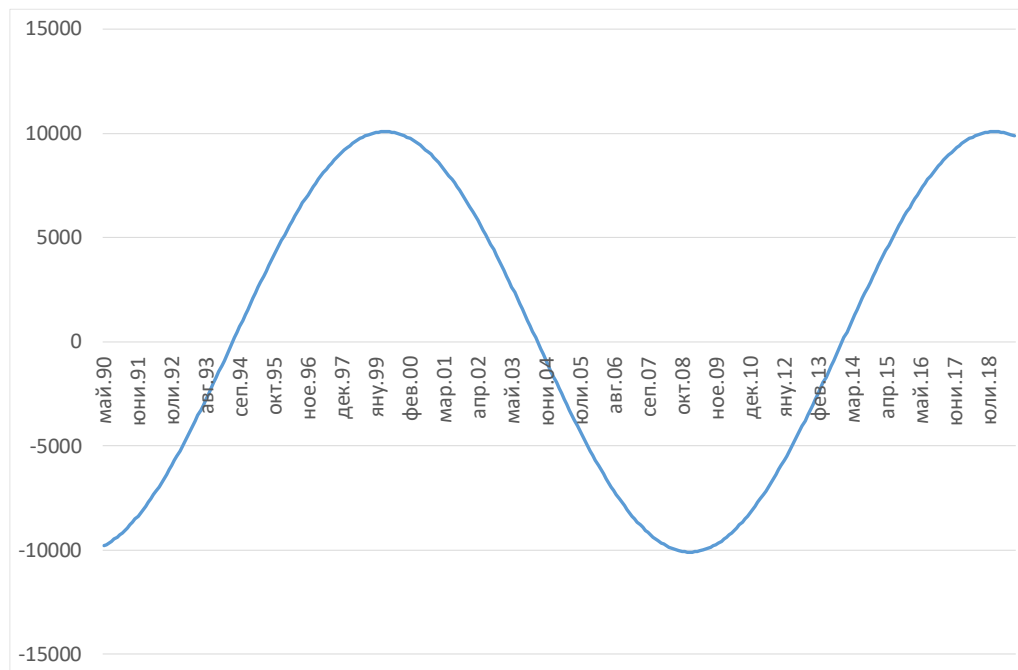


Фиг. 13 показва, че във времевия ред на базисните индекси на потребителските цени (т.е. в общото равнище на цените) има трайна тенденция към нарастване, като в края на периода нарастването се забавя.

Всички хармонични компоненти, които имат период по-малък от две трети от дължината на времевия ред, описват цикли. В конкретния пример това са всички останали 12 хармонични компонента:

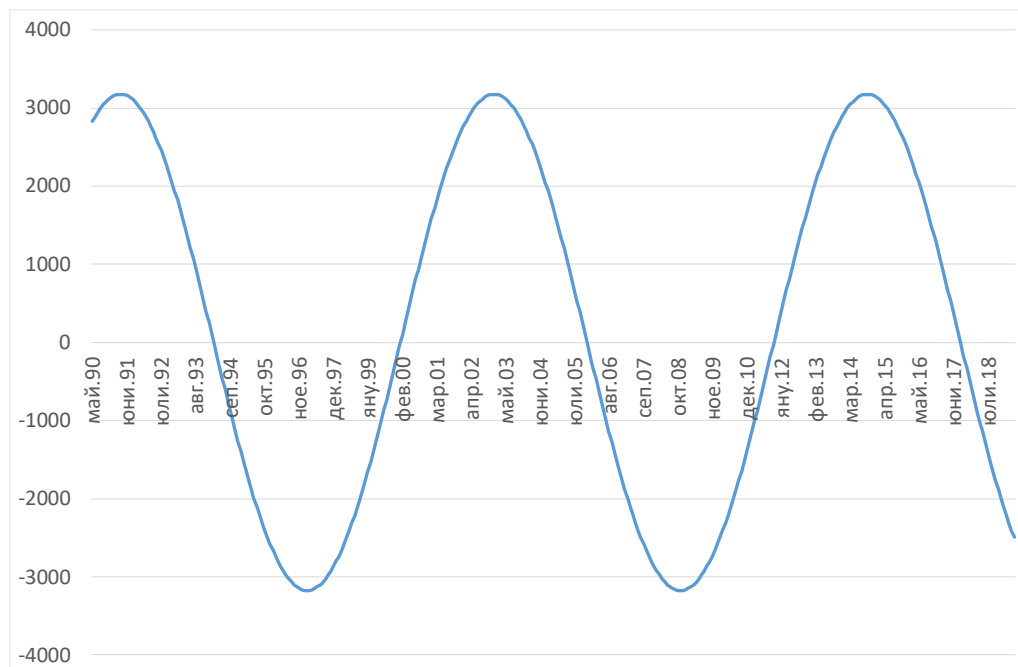
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 233 месеца.

Фиг. 14. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 233 месеца



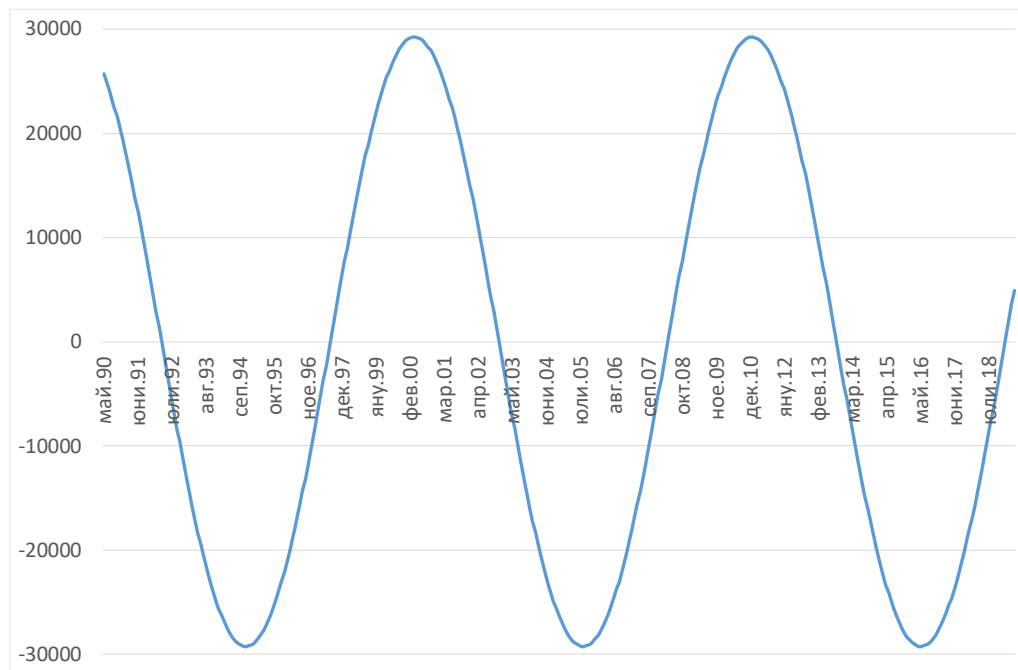
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 141 месеца.

Фиг. 15. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 141 месеца



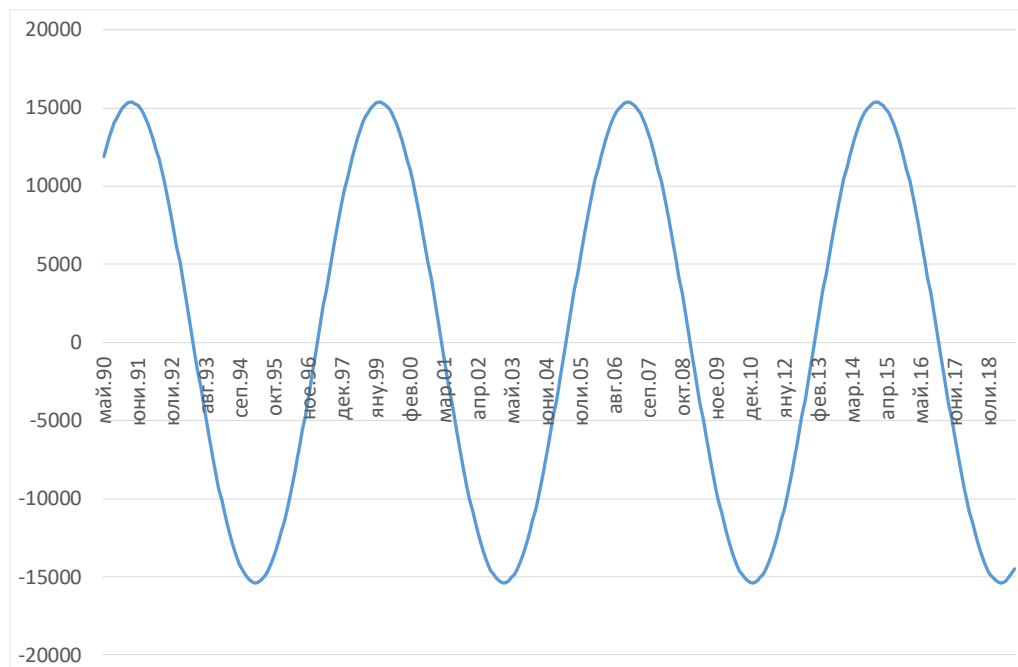
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 129 месеца.

Фиг. 16. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 129 месеца



- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 95 месеца.

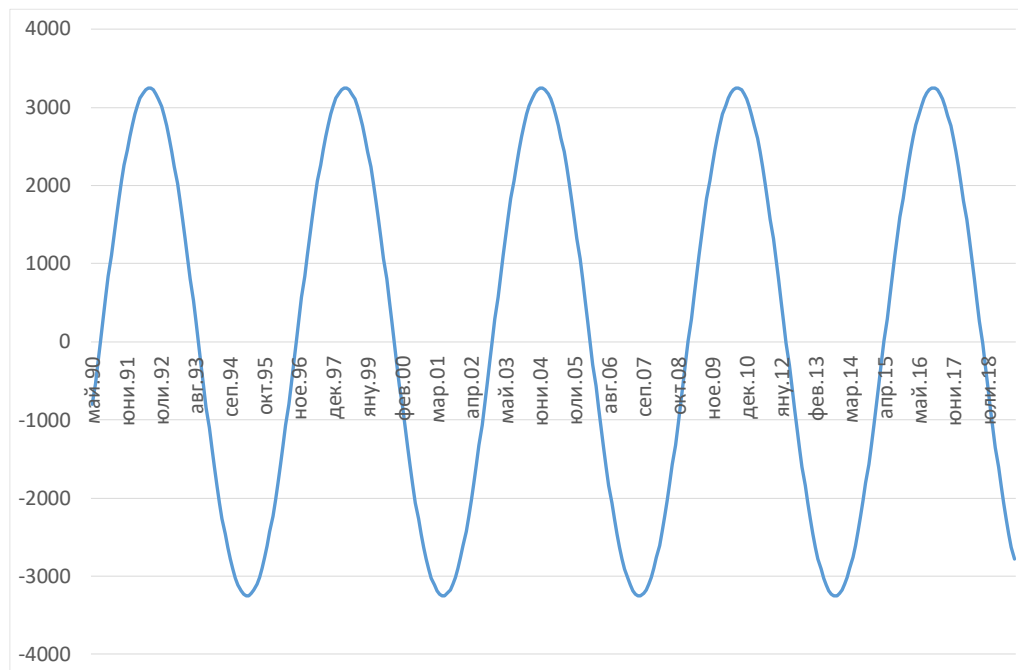
Фиг. 17. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 95 месеца



- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 74 месеца.

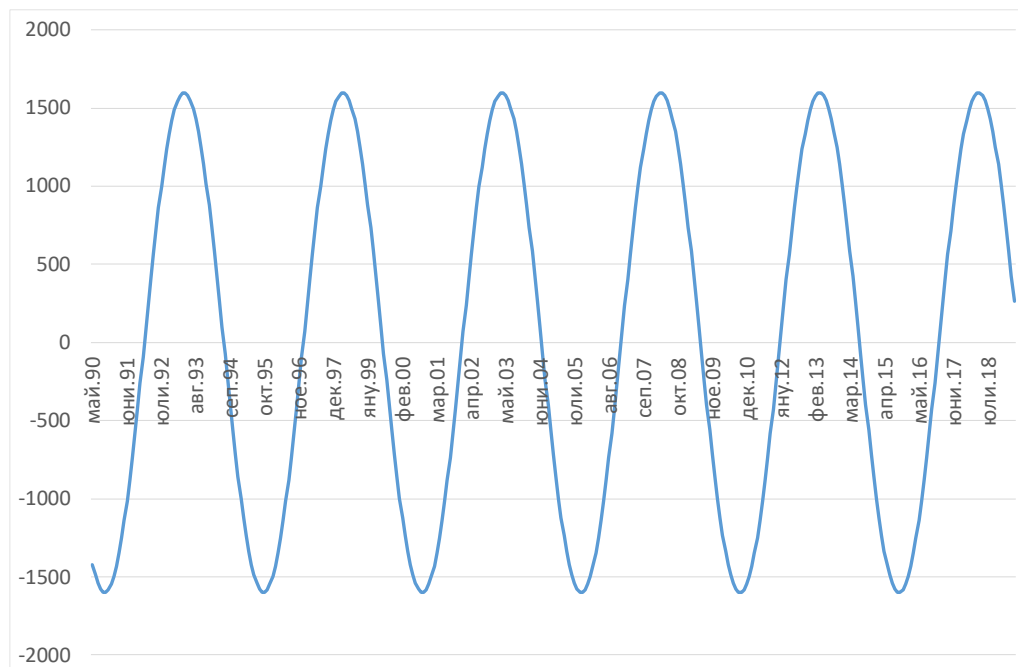


Фиг. 18. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 74 месеца



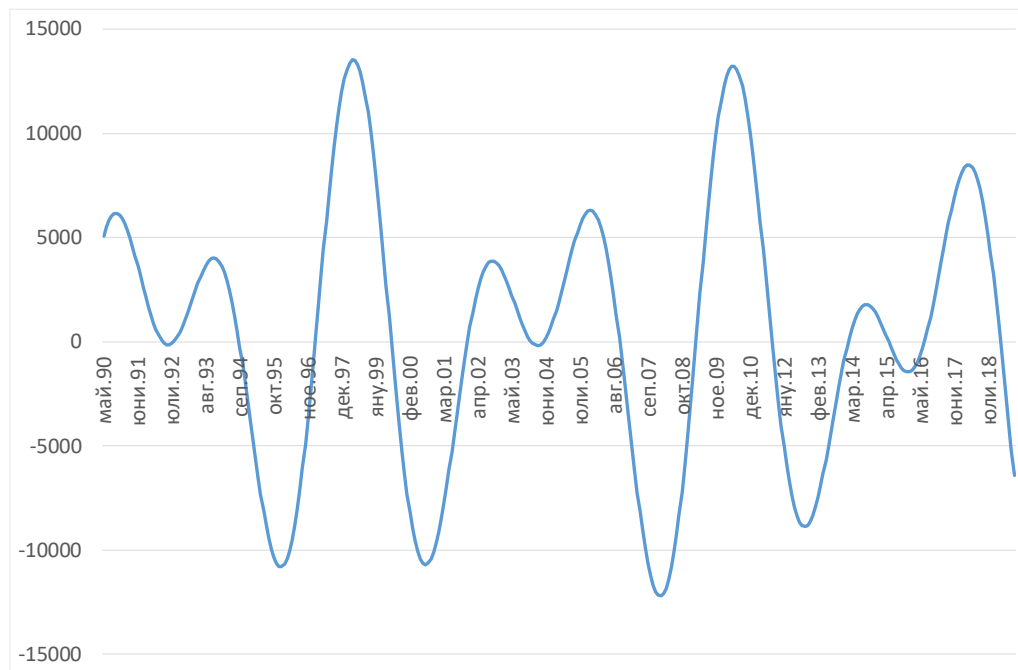
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 60 месеца.

Фиг. 19. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 60 месеца



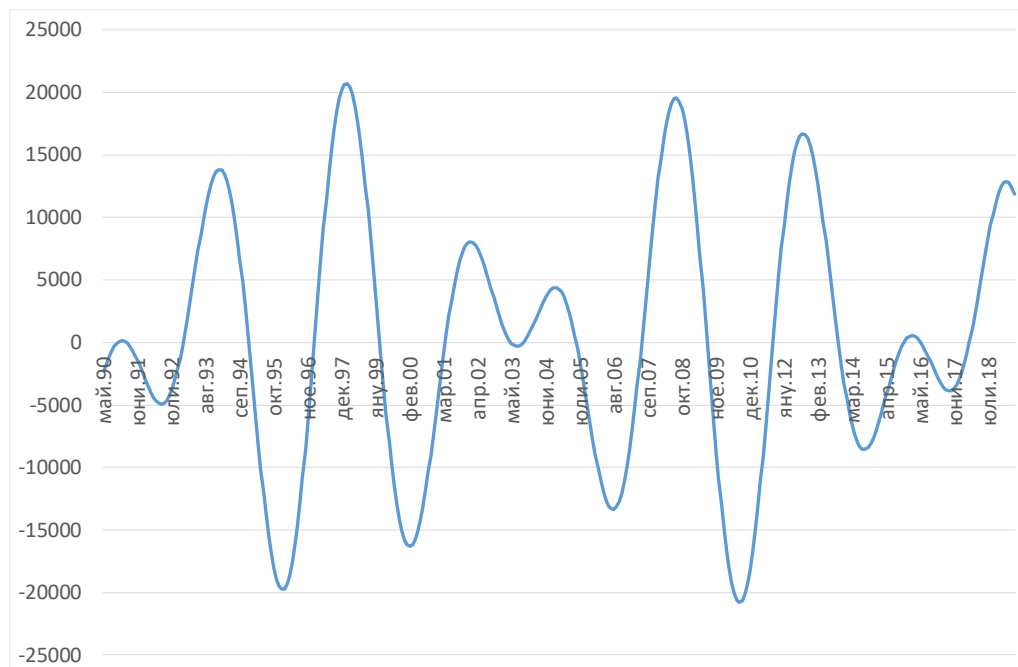
- Хармоничен компонент с променлива амплитуда с период 58 месеца.

Фиг. 20. Хармоничен компонент с променлива амплитуда с период 58 месеца



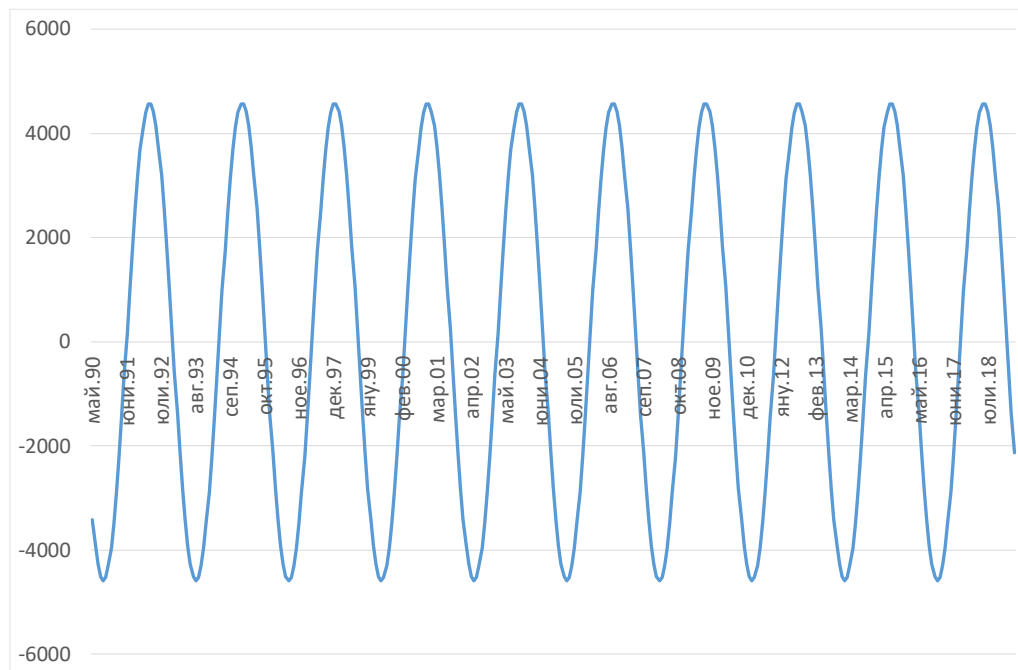
- Хармоничен компонент с променлива амплитуда с период 50 месеца.

Фиг. 21. Хармоничен компонент с променлива амплитуда с период 50 месеца



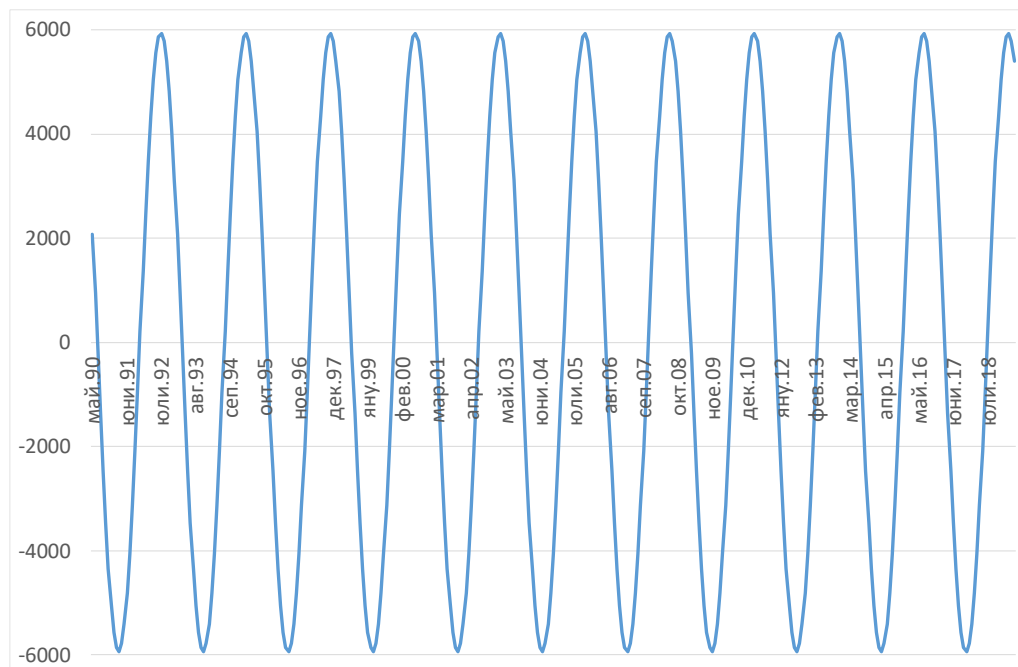
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 35 месеца.

Фиг. 22. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 35 месеца



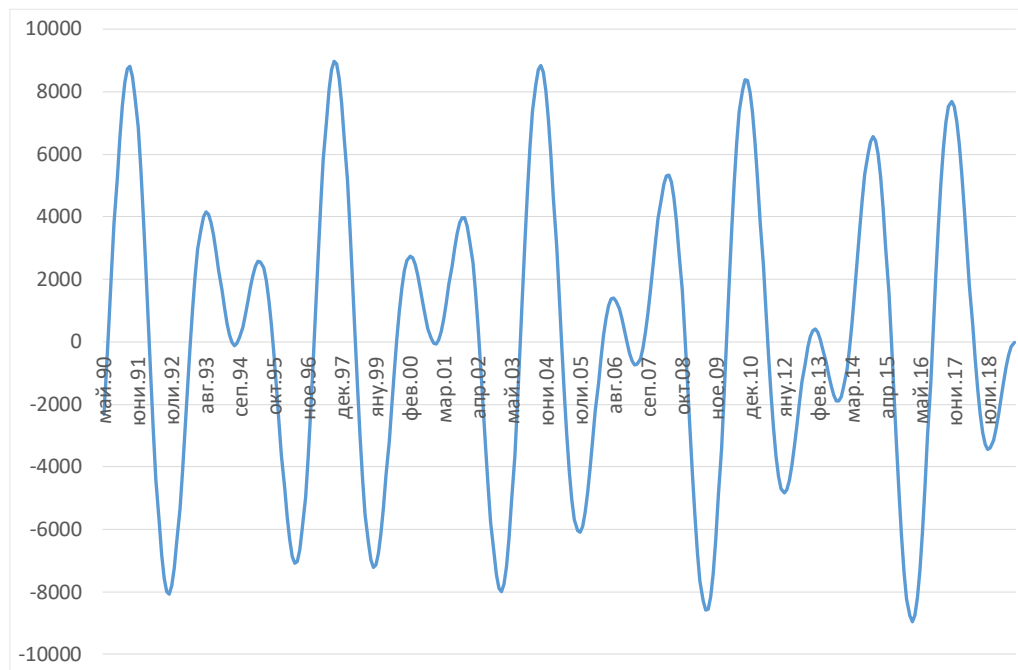
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 32 месеца.

Фиг. 23. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 32 месеца



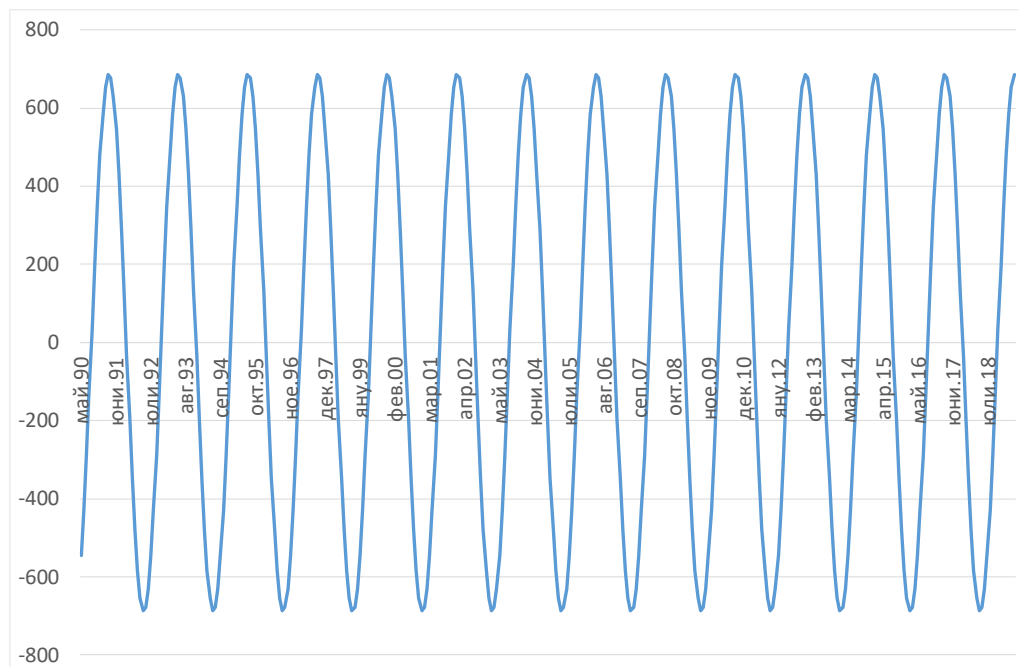
- Хармоничен компонент с променлива амплитуда с период 32 месеца.

Фиг. 24. Хармоничен компонент с променлива амплитуда с период 32 месеца



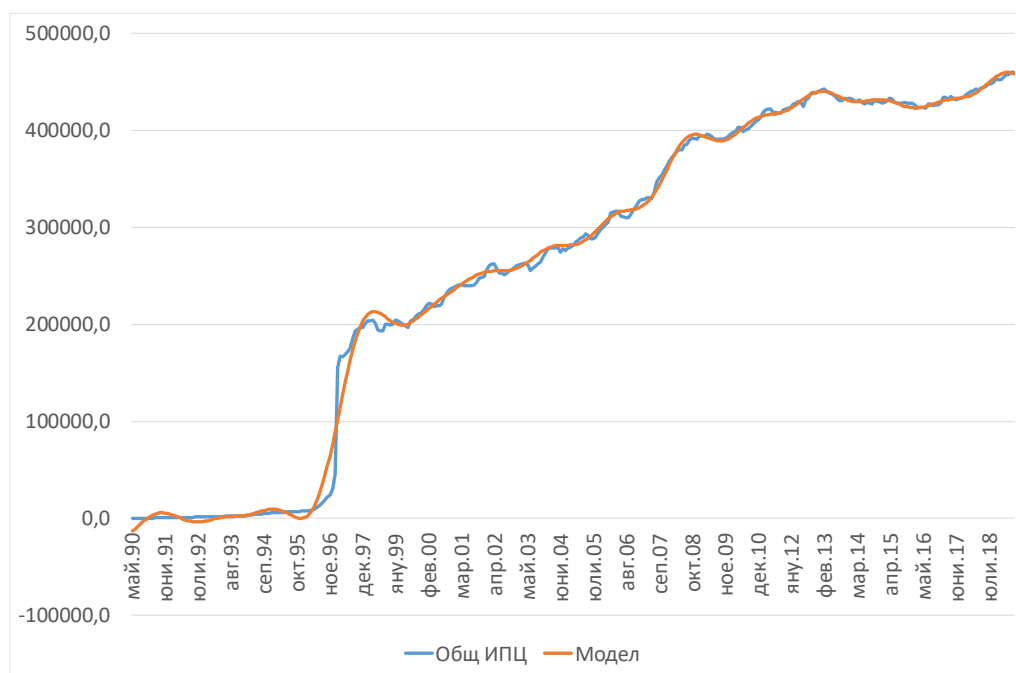
- Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 26 месеца.

Фиг. 25. Хармоничен компонент с постоянна амплитуда с период 26 месеца



Наслагването на всички хармонични компоненти дава пълния модел на динамиката на изследвания времеви ред:

Фиг. 26. Базисни индекси на потребителските цени при база май 1990 година = 100%



Полученият модел има много добра обяснителна сила. Неговият множествен коефициент на определеност е 99,8%, което означава, че 99,8% от промяната на базисните индекси на потребителските цени (т.е. на общото равнище на цените) се обяснява от модела.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получените теоретични и емпирични резултати недвусмислено показаха, че един хармоничен компонент с променлива амплитуда може да се представи като сума на два хармонични компонента с постоянна амплитуда, и обратно, сума от два хармонични компонента с постоянна амплитуда може да се представи като един едни хармоничен компонент с променлива амплитуда. За цела, първо, се оценява модел, който не е сума от отделни хармонични компоненти, а е сума от двойки хармонични компоненти. И второ, дефинира се правило, което има формата на система от две неравенства. Само когато и двете неравенства са удовлетворени, само тогава може да се говори за цикличен компонент с променлива амплитуда.

## REFERENCES

1. Bretthorst, G., 1988. Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag
2. Bretthorst, G., 1990. An Introduction to Parameter Estimation Using Bayesian Probability Theory, in P. Fougere (ed.), Maximum Entropy and Bayesian Methods, Dartmouth: Kluwer Academic Publishers, 1-27
3. Gatev, K., Koseva, D. and Spasov, A., 1991. Obshta teoriya na statistikata. Sofia: Nauka i izkustvo
4. Naydenov, G. and Haralampiev, K., 2014. Dulgite vulni na Kondratiev pri "sotsializma". Sofia: Izdatelski kompleks – UNSS