Въведение във вероятностите

Фундаментални понятия, закони и примери

Мартин Минчев
съвместно с проф. Младен Савов

Семково, 17.07.2023

- Лекции и упражнения по вероятности (и малко статистика), ФМИ-СУ:https://www.youtube.com/@ProbabilitySU
- За материали към горния курс: https://shorturl.at/izFU2
- За въпроси: mjminchev@fmi.uni-sofia.bg
- Начален учебник: Probability: An Introduction by Grimmett and Welsh
- Визуализиации: https://www.youtube.com/@3blue1brownюю https://seeing-theory.brown.edu/index.html

Понятия

- вероятностно пространство/елементарно събитие/събитие
- вероятност/условна вероятност
- формула на Бейс
- случайна величина
- независимост на събития/случайни величини
- очакване и дисперсия
- дискретно/непрекъснато разпределение
- плътност и функция на разпределение
- закон за големите числа
- централна гранична теорема

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези?

Примери

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? Отг: 1/4

$$\frac{TT}{EE+TE+ET+TT}$$

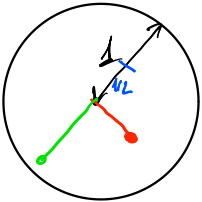
Примери

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? Отг: $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в $6/49$?

Примери

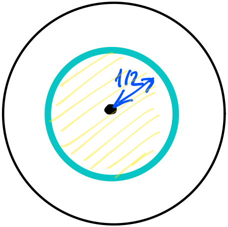
- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? Отг: $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в $6/49$? Отг: $1/\binom{49}{6}$

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? Отг: $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в $6/49$? Отг: $1/\binom{49}{6}$
- Каква е вероятността при избор на точка в кръг с радиус 1, тя да е на разстояние най-много на разстояние $1/2$ от центъра?



Примери

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? Отг: $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в $6/49$? Отг: $1/\binom{49}{6}$
- Каква е вероятността при избор на точка в кръг с радиус 1, тя да е на разстояние най-много на разстояние $1/2$ от центъра?Отг: $1/4$



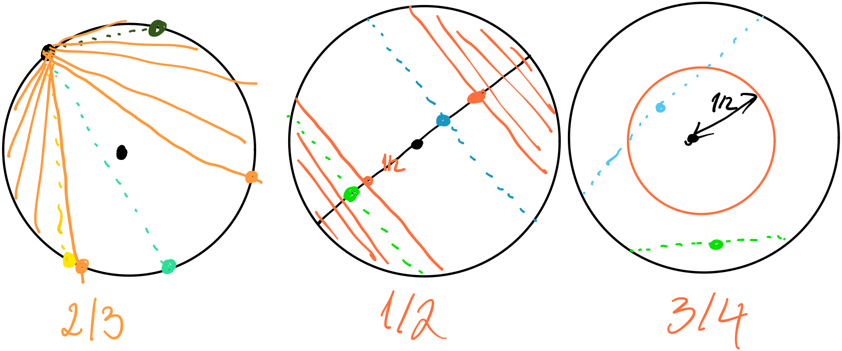
$$\frac{S_{\text{малко}}}{S_{\text{голямо}}} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$$

- Каква е вероятността случайна хорда в кръг с радиус 1, да бъде по-малка от 1?

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)

Примери

- Каква е вероятността случайна хорда в кръг с радиус 1, да бъде по-малка от 1?
- Отг[1]:



[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω.

Множество от елементарни събития

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω.

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$
2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
3. На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω.

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω.

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$
   - монета: $N = 2$, $\omega_1 =$ 'ези', $\omega_2 =$ 'тура', $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
   - 100 различими монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различими монети;
   - 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.
2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
3. На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω.

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω.

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$
   - монета: $N = 2$, $\omega_1 =$ 'ези', $\omega_2 =$ 'тура', $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
   - 100 различими монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различими монети;
   - 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.
2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
3. На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω.

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω.

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$
   - монета: $N = 2$, $\omega_1 =$'ези', $\omega_2 =$'тура', $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
   - 100 различими монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различими монети;
   - 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.
2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
   - $\omega_j =$'пада се ези за първи път на j-то хвърляне.
   - избор на точка в окръжност. Тогава можем да опишем ω може да се опише чрез координати: (x_ω, y_ω), като $x_\omega^2 + y_\omega^2 = 1$.
3. На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω.

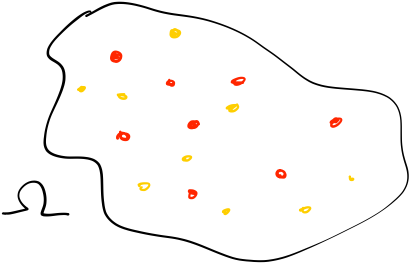
Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω.

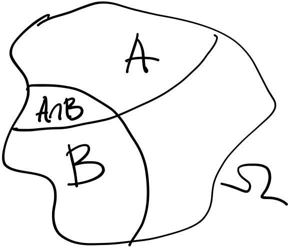
1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$
   - монета: $N = 2$, $\omega_1 =$'ези', $\omega_2 =$'тура', $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
   - 100 различими монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различими монети;
   - 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.
2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
   - $\omega_j =$'пада се ези за първи път на j-то хвърляне.
   - избор на точка в окръжност. Тогава можем да опишем ω може да се опише чрез координати: (x_ω, y_ω), като $x_\omega^2 + y_\omega^2 = 1$.
3. На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω.

Събития

Подмножество $A \subseteq \Omega$, т.е. колекция от ω_i, се нарича събитие.

Можем да съставим A по някакъв общ признак на елементарни събития $\omega \in \Omega$.





Подмножество $A \subseteq \Omega$, т.е. колекция от ω_i, се нарича събитие.

Можем да съставим A по някакъв общ признак на елементарни събития $\omega \in \Omega$.

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и събитието „пада се нечетно число” $A = \{1, 3, 5\}$;
2. $\Omega = \{\text{гласоподаватели}\}$ и събитието $A =$ „гласували за партия X”;

Подмножество $A \subseteq \Omega$, т.е. колекция от ω_i, се нарича събитие.

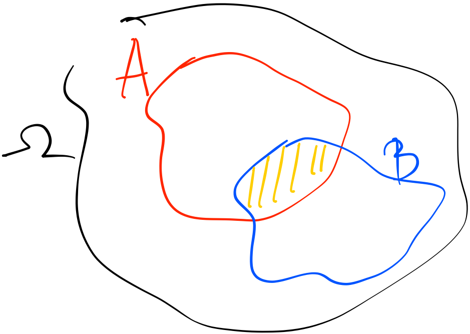
Можем да съставим A по някакъв общ признак на елементарни събития $\omega \in \Omega$.

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и събитието „пада се нечетно число” $A = \{1, 3, 5\}$;
2. $\Omega = \{\text{гласоподаватели}\}$ и събитието $A =$ „гласували за партия X”;

Операции със събития

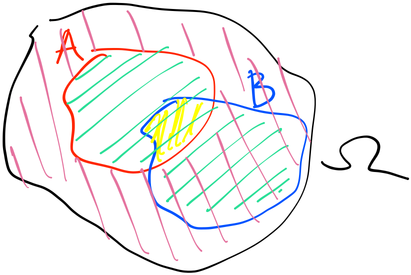
Ако $A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$, то

- $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ и $\omega \in B\}$;
- $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ или $\omega \in B\}$;
- $A^c = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.



$\Omega = \{$гласоподаватели$\}$, A=„гласували за партия X" и B=„гласоподаватели с образование от чужбина"

- $A \cap B$ =„гласоподаватели на X с образование от чужбина";
- $A \cup B$ =„гласували за X или гласоподаватели с образование от чужбина";
- A^c =„гласували за партия, различна от X".



Сигма алгебра

Колекция от събития $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}$ наричаме сигма алгебра, ако:

1. $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
   $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
   $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;
4. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$.

Сигма алгебра

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}.$$

Сигма алгебра

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}.$

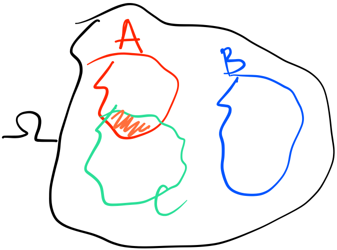
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}$ множеството на всички подмножества на Ω.

Вероятността като мярка

При зададени Ω и $\mathcal{F}$, вероятността е функция $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ със свойствата:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, за всяко $A \in \mathcal{F}$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, ако $A \cap B = \emptyset$

  $A_1, A_2, \cdots$ непресичащи се $\implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



Вероятностно пространство

Тройката

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

задава вероятностно пространство.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{\mathrm{N}}\}$, то $\left(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P}\right)$ е снабдено с равномерна вероятност, ако:

$$\mathbb{P}\left(\omega\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}, \text{ за всяко } \omega \in \Omega.$$

$\mathrm{N} = 13983816$, то Ω са всички шесторки в играта 6 от 49 и

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{13983816}.$$

$N = 13983816$, то Ω са всички шесторки в играта 6 от 49 и

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{13983816}.$$

Играчите често избягват избирането на съседни числа, но предпочитат календарни дати. Рационално ли е това?

$N = 13983816$, то Ω са всички шесторки в играта 6 от 49 и

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{13983816}.$$

Играчите често избягват избирането на съседни числа, но предпочитат календарни дати. Рационално ли е това?

Ако в средно участниците имат такова поведение, може ли да оптимизираме някой компонент?

Две кози и една кола са скрити зад три затворени врати по случаен начин.

Избирате една врата, без да я отваряте.

След избора се отваря една от останалите врати и виждаме една от козите.

Бихте ли сменили избора си, ако можете?[2]

[2] https://www.bbc.com/news/magazine-24045598

Условна вероятност и независимост

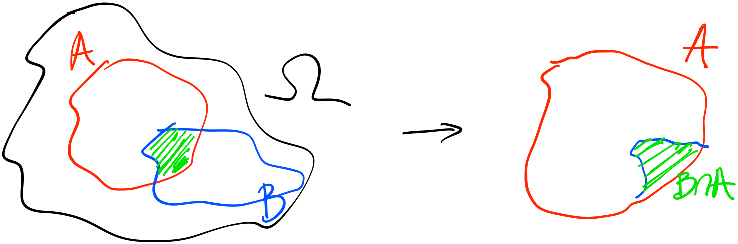
Условна вероятност

Ако се е сбъднало $A \subseteq \Omega$, то това променя вероятностното пространство [3]:

- $\Omega \to A$;
- $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \cap A = \{B \in \ \mathcal{F}, A \cap B\}$;
- $\mathbb{P} \to \mathbb{P}_A$, така че:

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}\,(B|A) = \frac{\mathbb{P}\,(A \cap B)}{\mathbb{P}\,(A)}.$$

- $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(A)$ (формула на Бейс)



Две събития A и B се наричат независими, ако

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \implies \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Независими не означава непресичащи се (несъвместими)!

В 6/49 са изтеглени 10001 тиража.

Каква е вероятността поне веднъж в два последователни тиража да са изтеглени едни и същи числа?

В 6/49 са изтеглени 10001 тиража.

Каква е вероятността поне веднъж в два последователни тиража да са изтеглени едни и същи числа?

$$\mathrm{A} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{10000} \{\text{числа от i-то теглене съвпадат с тези от } \mathrm{i}+1\}$$

В 6/49 са изтеглени 10001 тиража.

Каква е вероятността поне веднъж в два последователни тиража да са изтеглени едни и същи числа?

$$\mathrm{A} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{10000} \{\text{числа от i-то теглене съвпадат с тези от } \mathrm{i}+1\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathrm{A}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{\mathrm{i}=1}^{10000} \{\text{числа на i-то теглене не съвпадат с тези от } \mathrm{i}+1\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\text{числа на 1-то теглене не съвпадат с тези от } 2\right)^{10000} \\ &= 1 - \left(\frac{13983815}{13983816}\right)^{10000} \sim \frac{7}{1000}.\end{aligned}$$

Случайни величини

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство.

Тогава всяка „хубава" функция

$$\mathrm{X} : \Omega \to (-\infty, \infty)$$

се нарича случайна величина.

Пример: Хвърляме 2 монети. $\Omega = \{\mathrm{EE}, \mathrm{ET}, \mathrm{TE}, \mathrm{TT}\}$. Ако $\mathrm{X} =$ „брой езита", $\mathrm{X}(\mathrm{EE}) = 2, \mathrm{X}(\mathrm{ET}) = \mathrm{X}(\mathrm{TE}) = 1$ и $\mathrm{X}(\mathrm{TT}) = 0$.

Предимства

- числово описват характеристики на елементарни събития;
- позволяват математически операции;
- по-лесна компютърна обработка;
- позволяват моделиране на различни случайни събития с еднаква вероятностна структура;
- позволяват числови характеристики като средно и дисперсия.

$X : \Omega \to (-\infty, \infty)$ приема краен или изброим брой стойности[4].

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
  $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;
- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,
  $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \ldots\}$
  $$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

[4] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2

Дискретни случайни величини

$X : \Omega \to (-\infty, \infty)$ приема краен или изброим брой стойности[4].

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;

X	1	0
	p	1-p

- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

[4] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2

Дискретни случайни величини

$X : \Omega \to (-\infty, \infty)$ приема <u>краен или изброим</u> брой стойности[4].

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
  $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;
- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

X	0	1	$\cdots$	n

#√ k √√X√XXX

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

---

[4] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2

Дискретни случайни величини

$X : \Omega \to (-\infty, \infty)$ приема <u>краен или изброим</u> брой стойности[4].

- Монета ези/тура $(1/0)$, $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$.
  $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;

- брой езита от n хвърляния $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \mathrm{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

X X X ⋯ X ✓

X	0	1	⋯
	0	p	⋯

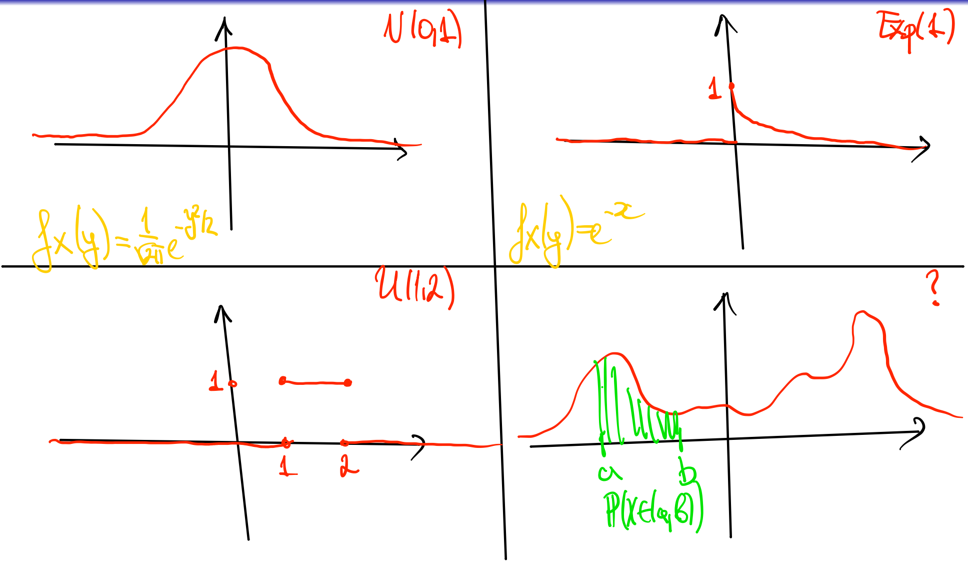
[4] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2

$X : \Omega \mapsto (-\infty, \infty)$ приема неизброимо много стойности.

Вероятностите се изчисляват с помощта на вероятностната плътност f_X (probability density function) или разпределението се задава

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(y)dy.$$

Абсолютно непрекъснати случайни величини: Примери[5]



[5] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2

Независимост и еднаквост по разпределение

- Две случайни величини X, Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), ако за всеки $a < b, c < d$

$$\mathbb{P}\left(\{a < X < b\} \cap \{c < Y < d\}\right) = \mathbb{P}\left(a < X < b\right) \mathbb{P}\left(c < Y < d\right).$$

- Две случайни величини X, Y са еднакви по разпределение ($X \stackrel{d}{=} Y$), ако за всеки $a < b$

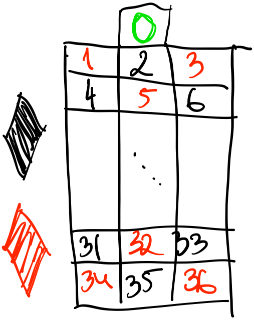
$$\mathbb{P}\left(a < X < b\right) = \mathbb{P}\left(a < Y < b\right).$$

Пример: Ако $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$, $X \stackrel{d}{=} 1 - X$, но двете никога не са равни..

Математическо очакване и дисперсия

- Игра на рулетка. Как да преценим дали е математически правилно да играем на черно/червено (или пък на число)?

- Игра на рулетка. Как да преценим дали е математически правилно да играем на черно/червено (или пък на число)?



На /

X	-1	$+1$
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$-1\cdot\left(\frac{19}{37}\right)+1\cdot\frac{18}{37}=-\frac{1}{37}$$

На число

X	-1	$+35$
	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$-1\cdot\frac{36}{37}+35\cdot\frac{1}{37}=-\frac{1}{37}$$

Ако X е случайна величина, то математическото очакване се задава чрез:

- $\mathbb{E}[X] = \sum k\mathbb{P}(X = k)$, ако X е дискретна;
- $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum k^2\mathbb{P}(X = k)$;
- $\mathbb{E}\left[e^X\right] = \sum e^k\mathbb{P}(X = k)$;
- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf_X(y)dy$, ако X е непрекъсната.

Ако X е печалба/загуба в следствие на вероятностна игра, то:

- $\mathbb{E}[X] > 0$, то играта е дългосрочно в наша полза;
- $\mathbb{E}[X] = 0$, то играта е честна;
- $\mathbb{E}[X] < 0$, то играта е дългосрочно в наша вреда[6].

[6] При игра на рулетка $\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{37}$ независимо как залагате 1 лев.

Дисперсията като грешка на типичната стойност

Математическото очакване $\mathbb{E}\left[X\right]$ е оценка за „типичната" стойност, но колко е добра? Възможна мярка е дисперсията:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 = \left(\mathbb{E}X\right)^2 - \mathbb{E}\left(X^2\right) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left(X - a\right)^2$$

Математическото очакване $\mathbb{E}[X]$ е оценка за „типичната" стойност, но колко е добра? Възможна мярка е дисперсията:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2 = (\mathbb{E}X)^2 - \mathbb{E}\left(X^2\right) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left(X - a\right)^2$$

Математическото очакване е оценка за типичната стойност на случайната величина погледната през призмата на най-малките квадрати.

$\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{37}$ при залог от 1 лев на рулетка

- Залог на червено:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X - \left(-\frac{1}{37}\right)\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{18}{37} + \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{19}{37} \approx 1;$$

- Залог на число:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X + \frac{1}{37}\right)^2 = \left(36 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{1}{37} + \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{36}{37} \approx 36.$$

Казино (отново)

В казино се предлага да хвърляте честна монета, докато хвърлите ези. Ако това се случи на n-ти ход, печелите 2^n лв. Колко бихте платили, за да участвате?

St Petersburg paradox

В казино се предлага да хвърляте честна монета, докато хвърлите ези. Ако това се случи на n-ти ход, печелите 2^n лв. Колко бихте платили, за да участвате? [7]

X	2	4	8	$\dots$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty \text{ ?!}$$

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

- 5% от популация са заразени с Ковид-19;
- Популацията се тества чрез ПСР, като е възможно обединяването на n проби в един пул; при положителен резултат се тестват всички поотделно;
- Нека X_n е броят тестове необходим за изследването на n човека. Намерете n, така че $\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} \to \mathsf{min}$;
- $\mathbb{E}\left[X_n\right] = 1 \times (1-0.05)^n + (n+1) \times (1-(1-0.05)^n) = n+1-n \times 0.95^n$;
- $\mathbb{E}\left[X_n\right]/n = 1 + 1/n - 0.95^n$ се минимизара за $n = 5$ с $\mathbb{E}\left[X_5\right]/5 \sim 0.43$.

- 5% от популация са заразени с Ковид-19;
- Популацията се тества чрез ПСР, като е възможно обединяването на n проби в един пул; при положителен резултат се тестват всички поотделно;
- Нека X_n е броят тестове необходим за изследването на n човека. Намерете n, така че $\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} \to \mathsf{min}$;
- $\mathbb{E}\left[X_n\right] = 1 \times (1-0.05)^n + (n+1) \times (1-(1-0.05)^n) = n+1-n \times 0.95^n$;
- $\mathbb{E}\left[X_n\right]/n = 1 + 1/n - 0.95^n$ се минимизара за $n = 5$ с $\mathbb{E}\left[X_5\right]/5 \sim 0.43$.

- 5% от популация са заразени с Ковид-19;
- Популацията се тества чрез ПСР, като е възможно обединяването на n проби в един пул; при положителен резултат се тестват всички поотделно;
- Нека X_n е броят тестове необходим за изследването на n човека. Намерете n, така че $\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} \to \mathsf{min}$;
- $\mathbb{E}\left[X_n\right] = 1 \times (1-0.05)^n + (n+1) \times \left(1-(1-0.05)^n\right) = n+1-n \times 0.95^n$;
- $\mathbb{E}\left[X_n\right]/n = 1 + 1/n - 0.95^n$ се минимизара за $n = 5$ с $\mathbb{E}\left[X_5\right]/5 \sim 0.43$.

Закон за големите числа и Централна гранична теорема

Нека $(X_i)_{i \geq 1}$ са независими, еднакво разпределени случайни величини. Означаваме

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Тогава[8]

$$\widehat{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}\left[X_1\right].$$

[8] https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html

Сред огромна популация мерим наличността на свойство например „гласоподаветел за X”. Как ще оценим пропорцията p от популацията с това свойство?

Пропорции

Сред огромна популация мерим наличността на свойство например „гласоподаветел за X”. Как ще оценим пропорцията p от популацията с това свойство?

Номерираме членовете на популацията и тогава нека:

- $X_i = 1$, ако $i-$тият член притежава свойството. Следователно $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$;
- $X_i = 0$, ако $i-$тият член не притежава свойството и $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$.

Пропорции

Сред огромна популация мерим наличността на свойство например „гласоподавател за X”. Как ще оценим пропорцията p от популацията с това свойство?

Номерираме членовете на популацията и тогава нека:

- $X_i = 1$, ако $i-$тият член притежава свойството. Следователно $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$;
- $X_i = 0$, ако $i-$тият член не притежава свойството и $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$.

Ако разгледаме първите n члена, то

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{S_n}{n} \overset{?}{\approx} p = \mathbb{E}[X_1].$$

Разтърсваме и отваряме кутия с N монети. Преброяваме монетите показващи ези. Какво можем да кажем за техния брой? [9]

[9] https://www.youtube.com/watch?v=pK1NPKm2Dfc

Разтърсваме и отваряме кутия с N монети. Преброяваме монетите показващи ези. Какво можем да кажем за техния брой? [9]

Нека $X_i = 1$ ако $i-$тата монета е ези и $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$, иначе $X_i = 0$. Тогава

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{S_N}{N} \approx \frac{1}{2}.$$

[9] https://www.youtube.com/watch?v=pK1NPKm2Dfc

Покривка от сняг

Ако се загледаме към покривка от сняг, забелязваме, че върху равна повърхност тя е с приблизително еднаква дебелина! Защо?

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

[10] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

Отново $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, където $(X_i)_{i \geq 1}$ независими и еднакво разпределени. Тогава

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]}{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}}} \Rightarrow \xi \sim N(0,1).$$

[10] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

Отново $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, където $(X_i)_{i \geq 1}$ независими и еднакво разпределени. Тогава

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]}{\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}} \Rightarrow \xi \sim N(0,1).$$

Грубо казано [10],

$$S_n \approx N(n\mathbb{E}(X_1), nVar(X_1)).$$

[10] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

Отново $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, където $(X_i)_{i\geq 1}$ независими и еднакво разпределени. Тогава

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]}{\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}} \Rightarrow \xi \sim N(0,1).$$

Грубо казано [10],

$$S_n \approx N(n\mathbb{E}(X_1), nVar(X_1)).$$

Следва, че за големи n

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]\right| > a\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

[10] https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3

Имаме, че

$$\mathbb{E}\left[X_1\right] = \frac{1}{2}; \quad \mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

и тогава

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > b\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > b \times 2\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Имаме, че

$$\mathbb{E}\left[X_1\right] = \frac{1}{2}; \quad \mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

и тогава

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > b\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>b\times 2\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

В кутия имаме около $n = 10^{24}$ молекули и следователно, ако $b = 10^{-12}$, то $2b\sqrt{10^{24}} = 2$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 10^{-12}\right) \leq 0.05.$$

ЦГТ има фундаментална роля и при моделирането на случайни процеси - движение на частици, финансови активи, популации.

Най-общо да допуснем, че на всяка стъпка частицата се премества нагоре/надолу/наляво/надясно със случайна стъпка X_i, като стъпките $(X_i)_{i \geq 1}$ са независими и еднакво разпределени.

Тогава движението във времето се описва с $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Нека $\mathbb{P}\left(X_i = \pm\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{2}$, където типично N е огромно.

Тогава $X_i = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_i$, $\mathbb{P}(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ и

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{k} Y_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_k.$$

Нека $\mathbb{P}\left(X_i = \pm\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{2}$, където типично N е огромно.

Тогава $X_i = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_i$, $\mathbb{P}(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ и

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{k} Y_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_k.$$

Тогава

$$(S_k)_{k \le N} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_k\right)_{k \le N} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_{\frac{k}{N} N}\right)_{k \le N} \Rightarrow (B_t)_{t \le 1},$$

където B е Брауновото движение и $B_t \sim N(0, t)$.

Последното е резултат от ЦГТ, понеже за $k/N \sim t$, то

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_{tN} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{tN}} \tilde{S}_{tN} \sim \sqrt{t}\xi \sim N(0, t).$$

БЛАГОДАРЯ!